応用問題 解答例

$\boxed{1}$

(1)

(a) $p=R$ の瞬間, 対応する直線は円と接する. ゆえに, $0 \leq p \leq R$.

(b) θ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を動き, (a) より p は $0 \leq p \leq R$ を動く. ゆえに,

$$m(G_C) = \iint_D \mathrm{d}p\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R \mathrm{d}p\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R$$

となり, 示せた.

(2)

(a) 直線 g 上の任意の点を $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$ とする. 原点から直線 g におろした垂線の足 H の座標は $(p\cos\theta, p\sin\theta)$ であり, $\vec{OH}$ と $\vec{QH}$ は直交するから

$$\begin{aligned}
&\vec{OH}\cdot\vec{QH} = 0\\
&p\cos\theta(p\cos\theta - x_1) + p\sin\theta(p\sin\theta - y_1) = 0\\
&p^2 = (x_1\cos\theta + y_1\sin\theta)p\\
&\therefore p = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta
\end{aligned}$$

となる.

(b) 同位角より, 直線 g と x 軸のなす角は φ に等しい. また, 線分 PH, 直線 g, x 軸で囲まれる三角形に注目することで,

$$\begin{aligned}
\theta + \frac{\pi}{2} + (\pi - \varphi) &= \pi\\
\therefore \theta &= \varphi - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

がわかる. また, 点 $\mathrm{I}(s, y_0)$ は直線 g 上の点だから, (a) より次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
p &= s\cos\theta + y_0\sin\theta\\
&= s\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + y_0\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\\
&= s\sin\varphi - y_0\cos\varphi
\end{aligned}$$

(c) ヤコビアンを計算する.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(p,\theta)}{\partial(s,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial s} & \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \sin\varphi & s\cos\varphi + y_0\sin\varphi \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\\
&= \sin\varphi
\end{aligned}$$

(p,θ) が D 内を動くとき, (s,φ) は $0 \leq s \leq L, 0 \leq \varphi \leq \pi$ を動く.(p を固定したとき, φ が動くことで, 交点を固定したときの様々な直線を表すことができ, 重複なく表現するためには, $0 \leq \varphi \leq \pi$ が必要十分である. ただし, 線分 AB と重なる部分の重複は無視した) ゆえに,

$$\begin{aligned}
m(G_L) &= \iint_D \mathrm{d}p\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^L\int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi\\
&= 2L
\end{aligned}$$

(3) 長方形の中心を原点にとり, 長方形の 4 頂点の座標がそれぞれ $(a_0, b_0), (-a_0, b_0), (-a_0, -b_0), (a_0, -b_0)$

となるように x, y 軸をとる．ただし，$a_0 = \frac{a}{2}, b_0 = \frac{b}{2}$ とした．このとき，対称性から，$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ の範囲で積分したものの 4 倍が求める測度となる．$\theta \in [0, \pi/2]$ を固定したとき，p の動く範囲は図形的に考察から次のようにわかる．

$$0 \le p \le \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos(\theta - \theta_0)$$

ただし，θ_0 は $\tan\theta_0 = \frac{b}{a}$ を満たす．ゆえに，求める測度は

$$\begin{aligned}
m(G_R) &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cos(\theta - \theta_0)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\sqrt{a_0^2 + b_0^2}[\sin(\theta - \theta_0)]_0^{\pi/2} \\
&= 4\sqrt{a_0^2 + b_0^2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + \sin\theta_0\right) \\
&= 4\sqrt{a_0^2 + b_0^2}(\cos\theta_0 + \sin\theta_0) \\
&= 4\sqrt{a_0^2 + b_0^2}\left(\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} + \frac{b_0}{a_0^2 + b_0^2}\right) \\
&= 4(a_0 + b_0) \\
&= 2(a + b)
\end{aligned}$$

とわかる．

$\boxed{2}$

(1)

(a) 与えられた漸化式を式変形する.

$$\begin{aligned}
&D\boldsymbol{x}_{n+1} - L\boldsymbol{x}_{n+1} - R\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b} \\
&(D-L)\boldsymbol{x}_{n+1} = R\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b} \\
&\boldsymbol{x}_{n+1} = (D-L)^{-1}R\boldsymbol{x}_n + (D-L)^{-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

ここで, $D-L$ は正則であることに注意した. ゆえに, $M = (D-L)^{-1}R$, $\boldsymbol{c} = (D-L)^{-1}\boldsymbol{b}$ である.

(b) 漸化式で $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}'$ とすると, $\boldsymbol{x}'$ は

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x}' = M\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{c} \\
\therefore (D-L-R)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{c}
\end{gathered}$$

を満たす. すなわち, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^*$ である. ここで, $\boldsymbol{x}' = M\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{c}$ と (1) の漸化式の形の辺々引き算すると,

$$\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}' = M(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}')$$

を得るから,

$$\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}' = M^n(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}')$$

が成立する. 次に, M^n を具体的に考える.

$$M = (D-L)^{-1}R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, M の固有値は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 0, \frac{1}{4}$$

であり, M は対角化可能. すなわち, ある正則行列 P が存在して,

$$M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$

とかける. ゆえに, M^n は

$$M^n = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

であり, $n \to \infty$ で, $M \to O$ となるから,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}^*$$

となって, $\boldsymbol{x}_n$ は任意の初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に対して, $\boldsymbol{x}^*$ に収束することが示せた.

(2)

(a) 与えられた漸化式を式変形する.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n = \omega\{D^{-1}(L\boldsymbol{x}_{n+1} + R\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{x}_n\} \\
&\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \omega D^{-1}(L\boldsymbol{x}_{n+1} + R\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}) - \omega\boldsymbol{x}_n \\
&(E - \omega D^{-1}L)\boldsymbol{x}_{n+1} = ((1-\omega)I + \omega D^{-1}R)\boldsymbol{x}_n + \omega D^{-1}\boldsymbol{b} \\
&\boldsymbol{x}_{n+1} = (E - \omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)E + \omega D^{-1}R)\boldsymbol{x}_n + (E - \omega D^{-1}L)^{-1}\omega D^{-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

ここで, $E - \omega D^{-1}L$ は任意の ω に対して正則であることに注意した. ゆえに, $M = (E - \omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)E + \omega D^{-1}R)$, $\boldsymbol{c} = \omega(E - \omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}\boldsymbol{b}$ である.

(b)　$|M-\lambda E|=0$ を仮定する．このとき, λ は M の固有ベクトルの 1 つだから, あるベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在して, $M\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ が成立する．これを式変形すると,

$$\begin{aligned}
&M\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\\
\Longleftrightarrow&(E-\omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)E+\omega D^{-1}R)\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\\
\Longleftrightarrow&((1-\omega)E+\omega D^{-1}R)\boldsymbol{v}=(E-\omega D^{-1}L)\lambda\boldsymbol{v}\\
\Longleftrightarrow&(1-\omega)\boldsymbol{v}+\omega D^{-1}R\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}-\omega D^{-1}L\lambda\boldsymbol{v}\\
\Longleftrightarrow&\omega D^{-1}(R+\lambda L)\boldsymbol{v}=(\lambda+\omega-1)\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となるが, 最後の式は $\lambda+\omega-1$ が $\omega D^{-1}(R+\lambda L)$ の固有値であることを意味する．ゆえに,

$$|\omega D^{-1}(R+\lambda L)-(\lambda+\omega-1)E|=0$$

が成り立つ．

(c)　漸化式で $\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}'$ とすると, $\boldsymbol{x}'$ は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{0}=\omega\{D^{-1}(L\boldsymbol{x}'+R\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{x}'\}\\
\Longleftrightarrow&\boldsymbol{x}'=D^{-1}(L\boldsymbol{x}'+R\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b})\\
\Longleftrightarrow&(D-L-R)\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

を満たす．すなわち, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}^*$ である．ゆえに, (1)(b) と同様の議論を行うと, M の固有値の絶対値が 1 未満であればよいことがわかる．(複素数である場合も考慮した.) M の固有値の絶対値が 1 未満であるための ω の条件を求めるため, (b) の結果を利用する．すなわち, λ は M の固有方程式を解くには $|\omega D^{-1}(R+\lambda L)-(\lambda+\omega-1)E|=0$ を解けば良い．これを解く．

$$\begin{aligned}
|\omega D^{-1}(R+\lambda L)-(\lambda+\omega-1)E|&=\left|\omega\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\\lambda&0\end{pmatrix}-(\lambda+\omega-1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|\\
&=\begin{vmatrix}-(\lambda+\omega-1)&\frac{\omega}{2}\\\frac{\lambda\omega}{2}&-(\lambda+\omega-1)\end{vmatrix}\\
&=(\lambda+\omega-1)^2-\frac{\omega^2}{4}\lambda\\
&=\lambda^2+2(\omega-1)\lambda+(\omega-1)^2-\frac{\omega^2}{4}\lambda\\
&=\lambda^2-\frac{\omega^2-8\omega+8}{4}\lambda+(\omega-1)^2
\end{aligned}$$

である．このとき, 問題文の 2 つ目の事実を用いると, $|\lambda|<1$ となる条件は以下と同値であることがわかる．

$$\frac{|\omega^2-8\omega+8|}{4}-1<(\omega-1)^2<1 \tag{1}$$

1 つ目の不等式から考える．

$$\begin{aligned}
&\frac{|\omega^2-8\omega+8|}{4}-1<(\omega-1)^2\\
\Longleftrightarrow\ &|\omega^2-8\omega+8|<4(\omega-1)^2+4=4\omega^2-8\omega+8\\
\Longleftrightarrow\ &-4\omega^2+8\omega-8<\omega^2-8\omega+8<4\omega^2-8\omega+8
\end{aligned}$$

ここで,

$$-4\omega^2+8\omega-8<\omega^2-8\omega+8\Longleftrightarrow 5\omega^2-16\omega+16>0\Longleftrightarrow 5(\omega-8/5)^2+16/5>0$$

であり, かつ,

$$\omega^2 - 8\omega + 8 < 4\omega^2 - 8\omega + 8 \Longleftrightarrow 3\omega^2 > 0 \Longleftrightarrow \omega \neq 0$$

となり, $\omega \neq 0$ であれば不等式 (1) の 1 つ目の不等式は満たされることがわかる. 2 つ目の不等式については, $0 < \omega < 2$ がわかるため, 結局, $0 < \omega < 2$ が求めるべき条件である.

$\boxed{3}$ ここでは, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ を $\dot{x}$ で表す.

(1) 与えられた微分方程式は次のようになる.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x-y) \\ \dot{y} = a(x+y) \end{cases}$$

これを解く. まず, 2 式目から $x = \frac{1}{a}\dot{y} - y$ を 1 式目に代入し,

$$\frac{1}{a}\ddot{y} - \dot{y} = \dot{y} - ay - ay$$
$$\therefore \ddot{y} - 2a\dot{y} + 2a^2 y = 0$$

を得る. 特性方程式 $\lambda^2 - 2a\lambda + 2a^2 = 0$ を解けば, $\lambda = a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2} = a \pm ai$ となる. よって, y の一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$y = C_1 e^{at}\cos at + C_2 e^{at}\sin at$$

となる. また, x については

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}\dot{y} - y \\ &= \frac{1}{a}\left(C_1 a e^{at}\cos at - C_1 a e^{at}\sin at + C_2 a e^{at}\sin at + C_2 a e^{at}\cos at\right) - C_1 e^{at}\cos at - C_2 e^{at}\sin at \\ &= -C_1 e^{at}\sin at + C_2 e^{at}\cos at \end{aligned}$$

とわかる.

(2)

(a) 積の微分公式を用いる.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}r\sin\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}r\cos\theta$$

(b) (a) の結果を微分方程式に代入する.

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = ar(\cos\theta - \sin\theta) - r^3\cos\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = ar(\sin\theta + \cos\theta) - r^3\sin\theta \end{cases}$$

1 式目に $\sin\theta$ をかけ, 2 式目に $\cos\theta$ をかけて辺々引き算すると,

$$r\dot{\theta} = ar$$

を得る. また, 1 式目に $\cos\theta$ をかけ, 2 式目に $\sin\theta$ をかけて辺々足し算すると,

$$\dot{r} = ar - r^3$$

となる. 以下, $r = 0$ の解は除いて考えると, θ の一般解は $\dot{\theta} = a$ より, $\theta = at + \theta_0$ となる. 次に r の一般解を求める.

(i) $a = 0$ のとき

$\dot{r} = -r^3$ を解く.

$$\frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -1$$
$$-\frac{1}{2r^2} = -t + C$$
$$r^2 = \frac{1}{2t + C'}$$

となる.

(ii)　$a \neq 0$ のとき

$\dot{r} = ar - r^3$ を解く.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{ar - r^3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= 1 \\
\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{a - r^2}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= 1 \\
\frac{1}{a}\left(\log r - \frac{1}{2}\log\bigl(a - r^2\bigr)\right) &= t + C \\
\log\left(\frac{r^2}{a - r^2}\right) &= 2at + C' \\
\frac{r^2}{a - r^2} &= C'' e^{2at} \\
r^2 = \frac{aC'' e^{2at}}{1 + C'' e^{2at}} &= \frac{aC''}{C'' + e^{-2at}}
\end{aligned}
$$

(c)　$a = 1$ とすると, r の一般解は以下で表される.

$$
r^2 = \frac{C''}{C'' + e^{-2t}}
$$

また, $r(0) = r_0$ より C'' は

$$
C'' = \frac{r_0^2}{1 - r_0^2}
$$

とわかる. ゆえに, r の解は

$$
r(t)^2 = \frac{r_0^2}{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}
$$

とわかる. この式で $t \to \infty$ とすると, $r(t) = 1$ となる. また, θ の一般解は $\theta = t + \theta_0$ であるから, t が大きくなるにつれ, 解軌道 $(x(t), y(t))$ は中心を原点とし, 半径 1 の円に収束することがわかる.

(d)

(i)　$a = 0$ のとき, $r(0) = r_0$ での特殊解は

$$
\begin{aligned}
r(t)^2 &= \frac{1}{2t + \frac{1}{r_0^2}} \\
\theta(t) &= \theta_0
\end{aligned}
$$

である. ゆえに, t を大きくすると, $r(t)$ は 0 に収束していく. 一方 $\theta(t)$ は常に一定であるから. 軌道は点 $(r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$ の点から原点に向かって進む直線を描く.

(ii)　$a \neq 0$ のとき, $r(0) = r_0$ での特殊解は

$$
\begin{aligned}
r(t)^2 &= \frac{ar_0^2}{r_0^2 + (a - r_0^2)e^{-2at}} \\
\theta(t) &= at + \theta_0
\end{aligned}
$$

となる. ゆえに, $a > 0$ のとき, t を大きくすると, 反時計回りの螺旋を描きながら, 半径 $\sqrt{a}$, 中心原点の円に近づいていく. また, $a < 0$ のとき, t を大きくすると, 時計回りの螺旋を描きながら, 原点に近づいていく.

$\boxed{4}$

(1)　以下のように計算する.

$$a^b = e^{b\log a} = e^{(\mathrm{Re}(b)+i\mathrm{Im}(b))(\log|a|+i\arg a)} = |a|^{\mathrm{Re}(b)}e^{-\mathrm{Im}(b)\arg a}e^{i(\mathrm{Re}(b)\arg a+\mathrm{Im}(b)\log|a|)}$$

となるから, $\mathrm{Re}(b)\arg a + \mathrm{Im}(b)\log|a| = n\pi$ より, a^b は実数である.

(2)　原点中心, 半径 r の円上の点は $z = re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とかける. これを f でうつすと

$$f(z) = z - \frac{1}{z} = re^{i\theta} - \frac{1}{re^{i\theta}} = \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

となる.

(i)　$r = 1$ のとき,

$$f(z) = 2i\sin\theta$$

であるから, f によって, この円は 2 点 $-2i, 2i$ を端点とする線分にうつる.

(ii)　$r \neq 1$ のとき, f によって, この円は次の楕円にうつる.

$$\frac{x^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

ただし, $f(z) = x + yi$ とおいた.

(3)　原点中心で半径が R より小さい円を C とするとき, 次に注意する.

$$\oint_C z^k\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & (k \neq -1) \\ 2\pi i & (k = -1) \end{cases}$$

ゆえに, ローラン展開の式の両辺に z^{-k-1} をかければ

$$\frac{f(z)}{z^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n-k-1}$$

この式の両辺を C に沿って積分すれば, 先の関係式から

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_k$$

となる. よって,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,\mathrm{d}z$$

(4)

(a)　(3) の結果より, a_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

である. この積分を計算する. $z = e^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta < \pi)$ として考える. ($f(z)$ は $z = 0$ 以外で正則である.)

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{e^{\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\sin\theta}}{e^{i(n+1)\theta}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\sin\theta-n\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ = i\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(\sin\theta-n\theta)+i\sin(\sin\theta-n\theta))\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

ここで, 被積分関数の 1 項目は偶関数, 2 項目は奇関数であるから,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

をえる.

(b) $n = -1$ のとき, a_{-1} は

$$a_{-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

となる. ここで, $f(z)$ のローラン展開の z^{-1} の係数を求めることを考える.

$$f(z) = e^{\frac{z}{2}} e^{-\frac{1}{2z}} = \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{1}{2!}\frac{z^2}{2^2} + \cdots\cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2 z^2} - \cdots\right)$$

とかけるが, この式を展開して, z^{-1} の項を出すには, $k = 0, 1, \ldots$ に対して, 1 つ目の因数の z^k の項と, 2 つ目の因数の $\frac{1}{z^{k+1}}$ の項の積を考えればよい. ゆえに,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k!(k+1)!2^{2k+1}}$$

が示される.

$\boxed{5}$

(1) 球の単位法線ベクトルは $\boldsymbol{r}/r$ で与えられること, また, $r=a$ で一定のため,

$$I_S = \iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\mathrm{d}S = \iint_S \frac{r^2}{r^4}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\iint_S \mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi$$

とわかる.

(2) 次を計算する.

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \nabla(r^{-3})\cdot\boldsymbol{r} + r^{-3}\nabla\cdot\boldsymbol{r} = -3r^{-4}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} + 3r^{-3} = 0$$

S が原点を含まないとき, S 内の領域を V とすれば, ガウスの定理より

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\mathrm{d}V = 0$$

とわかる. 一方, S が原点を含むとき, 半径 a の球 S' が S 内の領域 V に含まれるように適当に a をとる. このとき, V から半径 a の球を除いた領域を考えることで, 上の議論より, $I_{S+(-S')}=0$ がわかる. ただし, $-S'$ は法線ベクトルを原点向きにとっていることを表す. これより,

$$I_S = I_{S+(-S')} = I_{S'} = 4\pi$$

が示される.

(3) 円盤を次のようにパラメータ表示する.

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} u\cos\theta \\ u\sin\theta \\ b \end{pmatrix} \quad (0\le u\le a,\ 0\le\theta<2\pi)$$

これより,

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-u\sin\theta\\ u\cos\theta\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u\end{pmatrix}$$

だから, $r=\sqrt{u^2+b^2}$ に注意すれば,

$$I_S = \iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^a bu(u^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\theta = -2\pi b\Big[(u^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\Big]_0^a = 2\pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

(4)

(a) S_1 を次のようにパラメータ表示する.

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}s\\t\\a\end{pmatrix} \quad (-a\le s\le a,\ -a\le t\le a)$$

これより,

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

だから, $r=\sqrt{s^2+t^2+a^2}$ に注意すれば,

$$I_{S_1} = \iint_{S_1}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{a}{(s^2+t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

となる．また, S_2 についても

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a \\ s \\ t \end{pmatrix} \ (-a \leq s \leq a,\ -a \leq t \leq a)$$

とパラメータ表示すれば, 同様の議論から同じ積分の形に帰着される．ゆえに, $I_{S_1} = I_{S_2}$ である．

(b)　一辺の長さが $2a$ の正方形 6 つ $S_1, S_2, \ldots, S_6$(S_3 以降も同様に定義する) を用いて, 原点を囲むとき, (2) より

$$I_{S_1} + \cdots + I_{S_6} = 4\pi$$

となる．ここで, (a) と同様に $I_{S_1} = \cdots = I_{S_6}$ が示せるから,

$$I_{S_1} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

である．

$\boxed{6}$

(1)

(a)　Δt の間には 1 人の客が来るか来ないかの 2 通りだけであるから, $1-p=1-\lambda\Delta t$ となる.

(b)　N 回の Δt の全てにおいて, 客が来なければよいから, $(1-p)^N$ と求まる.

(c)　各 Δt において, 客が到着する確率は p, 到着しない確率は $1-p$ であり, 求める確率は N 回の試行のうち, n 回確率 p の事象が起こる確率であるから, 二項分布を用いて

$$P_n = {}_N C_n p^n (1-p)^{N-n} = {}_N C_n (\lambda\Delta t)^n (1-\lambda\Delta t)^{N-n}$$

と求まる.

(2)　$N\to\infty$, $\Delta t\to 0$ とする極限を考える. $\Delta t = t_0/N$ を代入すれば,

$$P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\frac{(\lambda t_0)^n}{N^n}\left(1-\frac{\lambda t_0}{N}\right)^{N-n} = \frac{(\lambda t_0)^n}{n!}\frac{N!}{N^n(N-n)!}\left(1-\frac{\lambda t_0}{N}\right)^N\left(1-\frac{\lambda t_0}{N}\right)^{-n}$$

となる. ここで,

$$\frac{N!}{N^n(N-n)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N!} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)\to 1 \quad (N\to\infty)$$

かつ

$$\left(1-\frac{\lambda t_0}{N}\right)^N \to e^{-\lambda t_0} \quad (N\to\infty)$$

であるから, 結局

$$P_n = \frac{(\lambda t_0)^n}{n!}e^{-\lambda t_0}$$

となる.

(3)　期待値の定義に従う.

$$E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t_0)^n}{n!}e^{-\lambda t_0} = \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t_0)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t_0)^n}{n!} = \lambda t_0$$

(4)　$F(t) := P(T\le t)$ を求める. 来店時間間隔が t 秒以下である確率は, t 秒間に 1 人以上の客が来店する確率であるから, 1 人以上の客が来店する確率は $1-P_0$ である. ゆえに,

$$F(t) = 1-P_0 = 1-e^{-\lambda t}$$

となる. よって, $f(t)$ は

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda e^{-\lambda t}$$

となる.

(5)　$n=2$ のときを考える. 2 番目の客が来店するまでの時間間隔 T_2 に対して, T_2 の累積分布関数 $F(t) := P(T_2\le t)$ を求める. これは, 1 人目の客が $t'(<t)$ 秒以下で到着し, 2 人目の客が $t-t'$ 秒以下で到着する確率であるから, S_1 と S_2 が独立であることに注意して,

$$F(t) = \int_0^t\int_0^{t-t'}\lambda e^{-\lambda t''}\lambda e^{-\lambda t'}\,\mathrm{d}t''\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t'}(1-e^{-\lambda(t-t')})\,\mathrm{d}t' = 1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}$$

これより, T_2 の確率密度関数 $g_2(t)$ は

$$g_2(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

となる．同様にして, $n+1$ 番目の客が来店するまでの時間間隔 T_n の累積分布関数は, n 番目の客が $t'(<t)$ 秒以下で到着し, $n+1$ 番目の客が $t-t'$ 秒以下で到着する確率であるから, $g_n(t)$ が正しいと仮定すると,

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^t \int_0^{t-t'} \frac{\lambda^n t'^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t'} \lambda e^{-\lambda t''}\,\mathrm{d}t''\,\mathrm{d}t' = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t t'^{n-1} e^{-\lambda t'} (1-e^{-\lambda(t-t')})\,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \left(\int_0^t t'^{n-1} e^{-\lambda t'}\,\mathrm{d}t' - e^{-\lambda t} \int_0^t t'^{n-1}\,\mathrm{d}t' \right) \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \left(\int_0^t t'^{n-1} e^{-\lambda t'}\,\mathrm{d}t' - e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n} \right)
\end{aligned}$$

となり, これより, $g_n(t)$ は

$$g_n(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \left(t^{n-1} e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n} - e^{-\lambda t} t^{n-1} \right) = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} t^n e^{-\lambda t}$$

となり, 帰納法により証明された.

$\boxed{7}$

(1)　任意の t に対して, $f(t+2\pi)=f(t)$ が成立することである.

(2)　フーリエ級数展開の式において, 両辺を積分すると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)\mathrm{d}t = 2\pi a_0$$

となる. また, $\cos nt$ を掛け算して与えられた式を用いて積分すると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,\mathrm{d}t = a_m\pi$$

となる. 同様にして, $\sin nt$ を掛け算して与えられた式を用いて積分すると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,\mathrm{d}t = b_m\pi$$

となる. ゆえに, a_0, a_n, b_n は

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

となる.

(3)　(2) の式からフーリエ係数を求めると,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t\,\frac{2\pi^2}{3}\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\left[\frac{t\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t\right) = \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\pi(-1)^n}{n}\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}\\
b_n &= 0
\end{aligned}$$

であるから,

$$f(t)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

(4)　以下となる.

$$f(t)=\frac{\pi^2}{3}+\sin t+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

(5)　$t=\pi$ で $f(t)=t^2$ は連続だから, (3) の式に $t=\pi$ を代入し,

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi\\
&= \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

であるから, これを解いて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(6)　$f(t)^2$ の積分を考えると, 与えられた式から, 同じ項のみが残る. すなわち,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\cos^2 nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\sin^2 nt\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

(7)　(6) の式に $f(t)=t^2$ を適用する. 左辺の積分は

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi^4}{5}$$

となる. また, 右辺は

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4}+0\right)$$

となる. よって,

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

であるから, これを解いて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$