$\boxed{1}$　この問題では, ある図形 X に対し, X と交点をもつ直線の集合 G_X の"大きさ"を表す概念として測度 $m(G_X)$ を考える．測度 $m(G_X)$ は次の手順で計算できる．これを用いて, 下の問いに答えよ．

1. X を xy 平面上に任意に配置する．
2. G_X 内の任意の直線 g に対し, 図 1 のように, 原点と直線との距離を p, 原点を通る直線 g への垂線と x 軸との角度を θ とおく．ただし, θ は $0 \le \theta < 2\pi$ を満たすようにとる．
3. 直線 g が G_X 内を動くとき, g に対応する p と θ の動く範囲を D とし, 測度 $m(G_X)$ を次の定義式により計算する．(このとき, $m(G_X)$ は手順 1 の配置の仕方によらないことが示せる)

$$m(G_X) = \iint_D \mathrm{d}p\,\mathrm{d}\theta$$

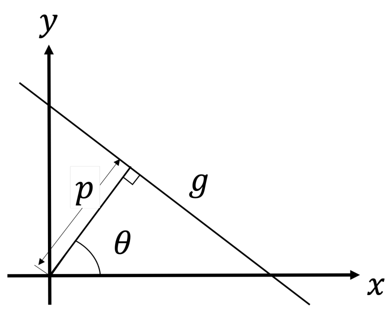

図 1　直線 g に対する (p, θ) の定義

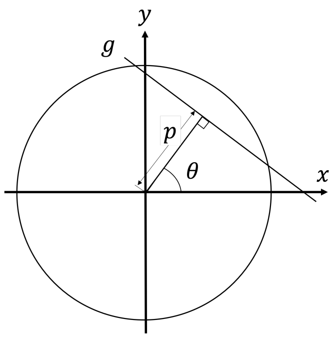

図 2　円と交点をもつ直線

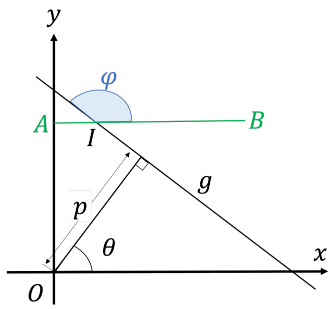

図 3　線分 AB と交点をもつ直線

(1)　図形 X を半径 R の円 C とする．図 2 に示すように, 円の中心を原点とするような座標系をとる．

(a)　$\theta = \theta_0$ を固定する．このとき, (p, θ_0) に対応する直線 g が円 C と交わるための p の条件を求めよ．

(b)　$m(G_C) = 2\pi R$ となることを示せ．

(2)　図形 X を長さ L の線分 AB とする．図 3 のように線分 AB と平行に x 軸をとり, 端点 A の座標が $(0, y_0)$ $(y_0 > 0)$ となるように y 軸をとる．G 内の直線 g と AB との交点を $\mathrm{I}(s, y_0)$ $(0 \le s \le L)$ とし, 直線 g のうち y 座標が y_0 以上となる部分と線分 BI との角度を φ とする．

(a)　図 3 において, 直線 g 上の任意の点を (x_1, y_1) とするとき, p を x_1, y_1, θ で表せ．ただし, $p \neq 0$ とする．

(b)　p, θ を s, φ, y_0 を用いてそれぞれ表せ．

(c)　(p, θ) を (s, φ) に変数変換することにより, $m(G_{\mathrm{AB}}) = 2L$ となることを示せ．ただし, 線分 AB を含む直線が (s, φ) 平面上で積分される寄与は 0 として良い．

(3)　図形 X を縦の長さを a, 横の長さを b とする長方形 R とする．このとき, 問題冒頭に述べた手順を用いて, $m(G_R)$ を計算せよ．また, $a = L$ とし, $b \to 0$ の極限を考えると, $m(G_R)$ は (2) で求めた測度 $m(G_{AB})$ に一致することを示せ．

$\boxed{2}$ 次の行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}^*$ をあるベクトル列 $\boldsymbol{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ の極限値として求めることを考える.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

以下の問いのために $A = D - L - R$ となる行列 D, L, R を次で定義する.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 適当に初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を与えたとき, 次の漸化式によってベクトル列 $\boldsymbol{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を生成することを考える.

$$D\boldsymbol{x}_{n+1} - L\boldsymbol{x}_{n+1} - R\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}$$

(a) 与えられた漸化式を次の形で表したとき, 行列 M とベクトル $\boldsymbol{c}$ を $D, L, R, \boldsymbol{b}$ を用いてそれぞれ表せ.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = M\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{c}$$

(b) ベクトル列 $\boldsymbol{x}_n$ は任意の初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に対して, $\boldsymbol{x}^*$ に収束することを証明せよ.

(2) 適当に初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を与えたとき, 次の漸化式によってベクトル列 $\boldsymbol{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を生成することを考える. ただし, ω は 0 でない実数の定数とする.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n = \omega\{D^{-1}(L\boldsymbol{x}_{n+1} + R\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{x}_n\}$$

(a) 与えられた漸化式を次の形で表したとき, 行列 M とベクトル $\boldsymbol{c}$ を $D, L, R, \boldsymbol{b}, \omega$ と 2×2 の単位行列 E を用いてそれぞれ表せ.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = M\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{c}$$

(b) 2×2 の単位行列を E とするとき, $|M - \lambda E| = 0$ ならば, $|\omega D^{-1}(R + \lambda L) - (\lambda + \omega - 1)E| = 0$ が成立することを示せ.

(c) ベクトル列 $\boldsymbol{x}_n$ が任意の初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に対して, $\boldsymbol{x}^*$ に収束するための ω の条件を求めよ. ただし, 以下の 2 つの事実は証明なしに用いても良い.

- 複素数 α に対し, $\alpha^n \to 0$ $(n \to 0)$ となる必要十分条件は, $|\alpha| < 1$ である.
- 実数 p, q に対し, 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ のすべての解の絶対値が 1 未満となる必要十分条件は, $|p| - 1 < q < 1$ を満たすことである.

$\boxed{3}$ 関数 $x = x(t), y = y(t)$ $(t \geq 0)$ に対し, 以下の連立微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,(x - y) + f(x, y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\,(x + y) + g(x, y) \end{cases}$$

ここで, a は実数の定数, $f(x, y), g(x, y)$ は微分可能な連続関数である.

(1) $f(x, y) = 0,\ g(x, y) = 0$ としたときの一般解を求めよ. ただし, ここでは $a \neq 0$ とする.

(2) $f(x, y) = -x(x^2 + y^2),\ g(x, y) = -y(x^2 + y^2)$ とする.

(a) 次の変数変換を行うとき, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ を $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ でそれぞれ表せ. ただし, $r(t) \geq 0$ とする.

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

(b) (a) の変数変換を行うとき, x, y についての与えられた微分方程式を r, θ についての微分方程式に書き直し, その一般解を求めよ.

(c) $a = 1$ とする. $r(0) = r_0 > 0$ であれば, どのように r_0 を取っても, t の増大にしたがって, $(x(t), y(t))$ は xy 平面上のある軌道に漸近することを示し, その軌道が描く図形を答えよ.

(d) 一般の a について, $r(0) = r_0 > 0$ のもとで $t \to \infty$ での解の軌道の様子を論ぜよ.

$\boxed{4}$ 以下の各問に答えよ.

(1) a, b を複素数とする. ある整数 n に対し, 次の等式が成立するとき, a^b は実数となることを示せ. ただし $a \neq 0$ とし, $\arg a$ は $-\pi < \arg a \leq \pi$ を満たすようにとった a の偏角を表す.

$$\mathrm{Re}(b) \arg a + \mathrm{Im}(b) \log |a| = n\pi$$

(2) 次の複素関数 $f(z)$ によって, 複素平面上の原点を中心とする半径 $r > 0$ の円はどのような図形にうつされるか, 答えよ.

$$f(z) = z - \frac{1}{z}$$

(3) $0 < |z| < R$ で正則な複素関数 $f(z)$ は $z = 0$ 周りで以下のようにローラン展開できる.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

原点中心で, 半径が R より小さい円を曲線 C とするとき, a_n を積分を用いて表せ.

(4) 複素関数 $f(z)$ を次のように定義する.

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

(a) $f(z)$ を $z = 0$ 周りでローラン展開したときの z^n の係数 a_n は以下で与えられることを示せ.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

(b) 次を証明せよ.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\theta + \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k!(k+1)!2^{2k+1}}$$

$\boxed{5}$ ここでは, 曲面 S に対して, 以下の面積分 I_S を考える.

$$I_S = \iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ただし, $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルを, r はその大きさを表す. また, S の法線ベクトルは原点から離れる向きにとるものとする.

(1) S が半径 a の球のとき, I_S の値を計算せよ.

(2) S が閉曲面のとき, 次を示せ.

$$I_S = \begin{cases} 4\pi & (S\text{ が原点を含むとき}) \\ 0 & (S\text{ が原点を含まないとき}) \end{cases}$$

(3) S が $z = b$ の平面上, 半径 a の円盤のとき, 面積分を実行することで I_S の値を計算せよ.

(4) S_1 を $z = a$ の平面上, 中心 $(0, 0, a)$, 1 辺の長さ $2a$ の正方形, S_2 を $x = a$ の平面上, 中心 $(a, 0, 0)$, 1 辺の長さ $2a$ の正方形とする.

(a) $I_{S_1} = I_{S_2}$ を示せ.

(b) I_{S_1} の値を求めよ.

$\boxed{6}$ 券売機が作る待ち行列について考察する. 時間間隔 Δt の間に 1 人の客が券売機に到着する確率 p は定数 λ を用いて, $p = \lambda \Delta t$ と表せるとする.

(1) $t_0 = N\Delta t$ を定数とする. このとき, 次の (a) から (c) の確率を $N, n, \lambda, \Delta t$ から必要なものを用いてそれぞれ表せ. ただし, 客は Δt の間に 2 人以上到着することはないものとする.

(a) Δt 秒間の間に客が 1 人も来ない確率

(b) t_0 秒間の間に客が 1 人も来ない確率

(c) t_0 秒間の間に n 人の客が券売機に来る確率 P_n

(2) (1)(c) で, $\Delta t \to 0$ としたとき (すなわち $N \to \infty$ としたとき), n 人の客が券売機に来る確率 P_n は次の確率関数で与えられるポアソン分布に収束することを示せ.

$$P_n = \frac{(\lambda t_0)^n}{n!} e^{-\lambda t_0}$$

ただし, 次を用いても良い.

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x$$

以下の問いで, n は (2) のポアソン分布に従うとする.

(3) t_0 秒間に券売機に到着する人数の期待値 $E(n)$ を求めよ.

(4) 来店時間間隔を表す確率変数を T とする. T が t 以下となる確率 (T の累積分布関数) を求めることで, T は次の確率密度関数で与えられる指数分布に従うことを示せ.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

(5) n 番目の客が来店するまでの時間間隔 T_n は, 指数分布に従う互いに独立な n 個の確率変数 S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて,

$$T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

と表される. このとき, T_n の確率密度関数 $g_n(t)$ が以下となることを証明せよ.

$$g_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

$\boxed{7}$ 周期 2π の周期関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開するとは,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

と表すことをいう. 以下の問いでは, 0 以上の整数 n, m に対して, 次が成立することを証明なしに用いても良い.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \ (n \neq m) \\ \pi \ (n = m) \end{cases} \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt \,\mathrm{d}t = 0$$

(1) $f(t)$ が周期 2π の周期関数であることの定義を述べよ.

(2) フーリエ級数展開の係数 a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ がそれぞれ以下で与えられることを示せ. ただし, 無限級数は項別積分ができるとする.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,\mathrm{d}t \,, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \,\mathrm{d}t \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t$$

(3) 次の関数のフーリエ級数展開を求めよ.

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

(4) 次の関数のフーリエ級数展開を求めよ.

$$f(t) = t^2 + \sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

(5) (3) の結果を用いて, 次の値を計算せよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(6) 次を証明せよ.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

(7) 次の値を計算せよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$