解答例

$\boxed{1}$

(1)　関数 y を x について微分すると次のようになる.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\sin x = 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$$

(2)　まず, (1) で求めた導関数が 0 になる点を求める.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x) = 0$$

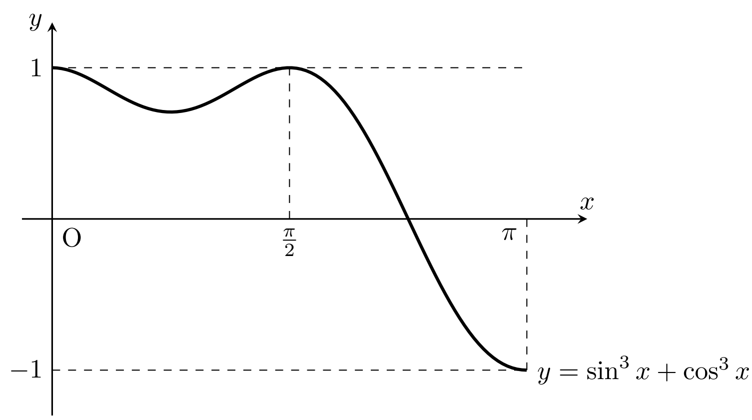
を解くと, $\sin x = 0$ または $\cos x = 0$ または $\sin x = \cos x$ である. それぞれの場合について解を求めると, 以下のようになる.

- $\sin x = 0$ のとき, $x = 0, \pi$ が解.
- $\cos x = 0$ のとき, $x = \frac{\pi}{2}$ が解.
- $\sin x = \cos x$ のとき, $x = \frac{\pi}{4}$ が解.

これらに注意すれば, 増減表は以下のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

よって, 図は次の通りとなる.



- $x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき, y は最大値 1 をとる
- $x = \pi$ のとき, y は最小値 -1 をとる

$\boxed{2}$

関数 z の x, y 偏微分をそれぞれ求める.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + y^2 \sin x e^{1-y^2\cos x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\cos x e^{1-y^2\cos x}$$

$x = 0, y = 1$ を代入すると, 以下となる.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = -2$$

よって, 接平面の方程式は次のようになる.

$$z - 2 = 1(x - 0) - 2(y - 1)$$
$$z = x - 2y + 4$$

$\boxed{3}$

関数 $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ とおく. $g(x, y) = 0$ のもとで関数 z は明らかに最大値と最小値をもつ.

$g_x = -2x = 0, \quad g_y = -2y = 0$ なる (x, y) は $g(x, y) = 0$ を満たさず, $g(x, y) = 0$ は端点をもたないため, ラグランジュの未定乗数法により極値の候補を求めれば, その点のいずれかが最大値・最小値を与える. ラグランジュ関数を以下に設定する.

$$L(x, y, \lambda) = xy - y + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

極値の候補は以下を満たす点 (x, y) である.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 1 - 2\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x^2 - y^2 = 0$$

この方程式を解く. $x = 0$ は解にはならないから, 1 式目から

$$2\lambda = \frac{y}{x}$$

となり, これを 2 式目に代入すると,

$$x^2 - x - y^2 = 0$$

を得る. これと 3 式目を合わせて, y の項を消去すると

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

を得る. これを解くと, $x = -\frac{1}{2}, 1$ である. ゆえに最大値・最小値を与える点の候補は

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (1, 0)$$

とわかる. これらの点における $f(x, y)$ の値を計算すると,

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$
$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$
$$f(1, 0) = 1$$

となる. したがって, 関数 z の最大値と最小値はそれぞれ以下の通りである.

- 最大値: $\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- 最小値: $-\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\boxed{4}$

(1) 積分定数を C として, 次のように計算する.

$$\begin{aligned}\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\mathrm{d}x &= \int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)^3\mathrm{d}x\\ &= \int\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

(2) 積分定数を C として, 次のように計算する.

$$\int 2^x dx = \int e^{x\log 2}dx = \frac{1}{\log 2}e^{x\log 2}+C = \frac{1}{\log 2}2^x + C$$

(3) 極座標 (r,θ) に変換する.

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\end{aligned}$$

このとき, 積分範囲 D は次の D' にうつる.

$$D' = \{(r,\theta)\mid 3\le r\le 4, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

また, ヤコビアンが r であることに注意すると, 求める積分は次のようになる.

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_3^4 e^r r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi\int_3^4 re^r\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\left\{[re^r]_3^4-\int_3^4 e^r\,\mathrm{d}r\right\}\\ &= 2\pi\left(4e^4-3e^3-e^4+e^3\right)\\ &= 2\pi(3e-2)e^3\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 球 $x^2+y^2+z^2=1$ は xy 平面上の半円 $y=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\le x\le 1)$ を x 軸周りに 1 回転させてできる図形とみなせる. したがって, その体積は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}V &= \int_{-1}^1 \pi y^2\,\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\ &= \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{6}$

(1) 両辺を積分すれば良い.

$$y = \int \left(x^2 + \frac{x}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C$$

ここで, $y(0) = 2$ より, $C = 2$ となる. よって, 解は

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + 2$$

とわかる.

(2) 変数分離形であることに注意して解く.

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan x$$
$$\int \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$\log|y| = -\log|\cos x| + C$$
$$y = \frac{C}{\cos x}$$

ただし, 最後の行で C を $\pm e^C$ と置き直した.

(3) 2 階定数係数斉次微分方程式であるから, 特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

を解くと,

$$\lambda = 1 \pm 2i$$

となるから, 一般解は

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

となる. ただし, C_1, C_2 は積分定数である.

$\boxed{7}$

(1) $|A| = 1, |B| = 6, |C| = 1$ となるから, 積の行列式は行列式の積になることに注意すると, $|ABC| = |A||B||C| = 6$.

(2)

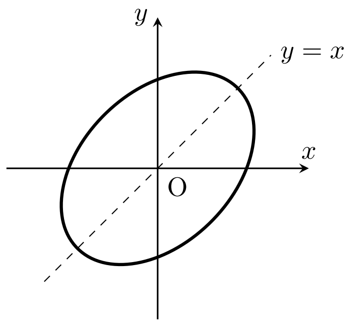
(a) ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積は, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を並べた行列の行列式であることを用いると, 求める面積は

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$$

となる.

(b) ABC を作用させると, その面積は ABC の行列式倍になるから, $ABC\boldsymbol{x}_1, ABC\boldsymbol{x}_2$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積は (1) と (2)(a) より 6 とわかる.

(3) A は原点を中心として 45 度回転させる線形変換を表し, B は x 軸方向に 3 倍, y 軸方向に 2 倍引き伸ばす線形変換を表す. 行列 AB は B を施した後に A を行う線形変換であるから, B により円は楕円に, A によりその楕円は 45 度回転する. よって, 図は以下のようになる.



$\boxed{8}$ (1) 与えられた条件は, 以下のように整理できる.

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(0)=2 \\ f(1)=3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -3a+b+3c=5 \\ a-b=2 \\ -a-b+c=3 \end{cases}$$

よって, $A, \boldsymbol{b}$ は次のようにとれば良い. (同値に変形してあれば, 複数の解答があり得る.)

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) $(A, \boldsymbol{b})$ を行基本変形により変換することで階段行列に変形する. ただし, $(n) \leftrightarrow (m)$ で n 行目と m 行目を入れ替えることを, $(n) \times k$ で n 行目を k 倍することを, $(n)+(m)\times k$ で n 行目に m 行目の k 倍を足すことを表すものとする.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)+(1)\times 3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 11 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\times(-1/2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)\times(-1/2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

よって, $\alpha=1, \quad \beta=-1, \quad \gamma=3$ を得る.

$\boxed{9}$

(1) 行列 A に対し, 数 λ が A の固有値であり, ベクトル $\boldsymbol{v}$ がそれに対応する固有ベクトルであるとは, $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0})$ となることである.

(2) (1) の定義を変形すると,

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

となる. ここで, この方程式が自明な解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つためには, 行列 $A-\lambda E$ が正則でないことが必要十分である. したがって, $|A-\lambda E|=0$ である.

(3) A は 2 次対称行列であるから, 直交行列により対角化できる. 固有値を求めるために $|A-\lambda E|=0$ を解く.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

これより, $\lambda=1,3$ である. A は 2 次正方行列であり, A は 2 つの相異なる固有値をもつから, A は対角化可

能である.

次に, $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを調べる. $(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を解く.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より, 固有ベクトルは $\boldsymbol{v} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ である.

同様に, $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを調べる. $(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を解く.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

より, 固有ベクトルは $\boldsymbol{v} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ である.

よって, 直交行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とすると,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と対角化できる.