$\boxed{1}$ $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ とする．次の各問に答えよ．

(1) y を x について微分せよ．

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で y の概形を描け．また, 図中に y の最大値, 最小値およびそれらを与える x の値を示すこと．ただし, 凹凸は調べなくてよい．

$\boxed{2}$ xyz 空間内の点 $(0, 1, 2)$ における, 次の曲面の接平面の方程式を求めよ．

$$z = e^x + e^{1-y^2 \cos x}$$

$\boxed{3}$ $x^2 + y^2 = 1$ のとき, 関数 $f(x, y) = xy - y$ の最大値および最小値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int 2^x \, \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ ただし, $D = \left\{(x, y) \mid 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\right\}$ とする．

$\boxed{5}$ 半径 1 の球の体積が $\dfrac{4\pi}{3}$ であることを示せ．

$\boxed{6}$ 以下では, $y = y(x)$ を解とする微分方程式を扱う．

(1) 次の微分方程式の解を初期条件 $y(0) = 2$ のもとで求めよ．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + \frac{x}{1 + x^2}$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \tan x$$

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = 0$$

$\boxed{7}$ 次の行列 A, B, C について, 下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|ABC|$ の値を計算せよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(b) $ABC\boldsymbol{x}_1, ABC\boldsymbol{x}_2$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ が行列 AB によって移される図形を平面上に図示せよ.

$\boxed{8}$ 定数 α, β, γ に対し, 関数 $f(x)$ を次のように定義し, $f(-1) = 5, f(0) = 2, f(1) = 3$ であるとする.

$$f(x) = \alpha - \beta + (\alpha - \beta - \gamma)x + (-3\alpha + \beta + 2\gamma)x^2$$

(1) 与えられた条件と以下が同値であるように行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ を定めよ.

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

(2) 拡大係数行列 $(A, \boldsymbol{b})$ を行基本変形することで, α, β, γ の値をそれぞれ求めよ.

$\boxed{9}$ 次の各問に答えよ.

(1) 行列 A に対し, 数 λ が A の固有値であり, ベクトル $\boldsymbol{v}$ がそれに対応する固有ベクトルであることの定義を述べよ.

(2) 行列 A の固有値 λ とそれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し, $|A - \lambda E| = 0$ が成立することを示せ. ただし, E は単位行列を表す.

(3) 次の行列 A は対角化可能か. 対角化可能であれば, 対角化せよ. また, 直交行列で対角化できる場合は, 直交行列で対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$