

編入数学徹底研究 勝手に第0章

1min.例題0-1 次を証明せよ。(1) $\log_2 3$ は無理数である(2) 複素数 z に対して、

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \text{ は実数である}$$

(3) 次の漸化式を満たす数列 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) の一般項は $a_n = 2^{n+1}$ である

$$a_{n+1} = 2a_n, \quad a_0 = 2$$

例題0-2 次の式のうち、正しいものを全て選べ。(ただし、 x, y, z は実数)

(1) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

(8) $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$

(2) $|xy| = |x||y|$

(9) $\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)}$

(3) $|x + y| = |x| + |y|$

(10) $\sin^2(\sqrt{x^2 + 1}) + \cos^2(\sqrt{x^2 + 1}) = 1$

(4) $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(11) $3^{x+y} = 3^x + 3^y$

(5) $\sqrt{x^2} = x$

(12) $3^{xy} = 3^x \cdot 3^y$

(6) $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$

(13) $\log_{10}(x + y) = \log_{10}x + \log_{10}y$

(7) $\frac{z}{x+y} = \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$

(14) $\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$

例題0-3 次のグラフの概形を描け.

(1) $y = 4x^2 - 4x + 2$

(2) $y = \sqrt{2x - 1}$

(3) $y = -\sin(5x)$

(4) $y = (0.5)^x$

(5) $y = \log_2 x^2$

(6) $y = 2\sqrt{9 - x^2}$

例題0-4 次の方程式を解け.

(1) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$

(2) $\sin(\pi x^2) = \frac{1}{2}$ (ただし、 $-2 \leq x \leq 2$)

(3) $2 \cos^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$

(4) $(2^{x+3} - \sqrt{2})(2^x - 3) = 0$

(5) $\log_3 x + \log_3(x - 1) = \frac{1}{\log_2 3}$

例題0-5 次の不等式を解け.

(1) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 > 0$

(2) $-x^3 + 5x^2 - 9x + 6 > 0$

(3) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ただし、 $0 \leq x \leq \pi$)

(4) $\sin x - \cos x + 1 > 0$ (ただし、 $0 \leq x \leq 2\pi$)

(5) $9^x - 3^{x+1} > 0$

(6) $2 \log_{10}(2 - x) \leq \log_{10}(x^2 - 2)$