1階微分方程式 総まとめ【解答】 1/3

1min.

1

(1) $y'+y=0$ (変数分離形)

$y'=-y$

$\frac{1}{y}y'=-1$

$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx=-\int 1\cdot dx$

$\log|y|=-x+C$

$y=C\cdot e^{-x}$

(2) $y'+y=x^3$ (同形)

斉次の解は (1)より $y=Ce^{-x}$

Cを$u(x)$として代入すると.

$u'e^{-x}-ue^{-x}+ue^{-x}=x^3$

$u'=x^3e^x$

$u=\int x^3e^x dx$

$=x^3e^x-3\int x^2e^x dx$

$=x^3e^x-3x^2e^x+6\int xe^x dx$

$=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C$

よって. $y=ue^{-x}$

$=x^3-3x^2+6x-6+Ce^{-x}$

(3) $y'+y=y^3$ (変数分離形)

$y'=y^3-y$

$\frac{1}{y(y^2-1)}y'=1$

$\int \frac{1}{y(y-1)(y+1)}dy=\int dx$

$\int\left(\frac{-1}{y}+\frac{\frac{1}{2}}{y-1}+\frac{\frac{1}{2}}{y+1}\right)dy=x+C$

$-\log|y|+\frac{1}{2}\log|y-1|+\frac{1}{2}\log|y+1|=x+C$

$\log\left|\frac{(y-1)(y+1)}{y^2}\right|=2x+C'$

$\frac{(y-1)(y+1)}{y^2}=C\cdot e^{2x}$

$\frac{y^2-1}{y^2}=Ce^{2x}$

$\therefore y^2=\frac{1}{1-Ce^{2x}}$

(4) $y'+y=y^3e^x$ ($n=3$) (ベルヌーイ)

$z=y^{1-3}=y^{-2}$ とおくと.

$z'=-2y^{-3}y'$ となる. 与式の両辺に$(-2y^{-3})$をかけると

$-2y^{-3}y'-2y^{-2}=-2e^x$

$\therefore z'-2z=-2e^x$ ← 同形

これをとく.

斉次の解は $z'-2z=0$ より $z=Ce^{2x}$

Cを$u(x)$として代入すると.

$u'e^{2x}+2ue^{2x}-2ue^{2x}=-2e^x$

$u'=-2e^{-x}$

$u=\int -2e^{-x}dx=2e^{-x}+C$

よって. $z=ue^{2x}=2e^x+Ce^{2x}$

$z=\frac{1}{y^2}$ より

$y^2=\frac{1}{2e^x+Ce^{2x}}$

1階微分方程式 総まとめ【解答】 2 /3

1min.

2

(1) $xy' - y = (y')^3$

$y = xy' - (y')^3$ (クレーロー)

両辺微分して

$y' = y' + xy'' - 3(y')^2 y''$

$0 = y''(x - 3(y')^2)$

(i) $y'' = 0$ のとき. $y' = C$ (Const.)より

$y = xy' - (y')^3$

$= Cx - C^3$

(ii) $x - 3(y')^2 = 0$ のとき

$y' = p$ として.

$\begin{cases} x = 3p^2 \\ y = px - p^3 \end{cases}$ だから.

$y = p(x - p^2) = p(x - \frac{1}{3}x)$

$= \frac{2}{3}xp$ より

$y^2 = \frac{4}{9}x^2 \cdot p^2 = \frac{4}{9}x^2 \cdot \frac{1}{3}x$

よって

$\therefore y^2 = \frac{4}{27}x^3$

以上より.

一般解: $y = Cx - C^3$

特異解: $y^2 = \frac{4}{27}x^3$

(2) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ (同次形)

$u = \frac{y}{x}$ とおくと. $(y = ux)$

$y' = u'x + u$ より

$u'x + u = u + \sqrt{1 + u^2}$

$u' = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + u^2}$ ← 変数分離形

$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \int \frac{1}{x} dx$

$\log|u + \sqrt{1+u^2}| = \log|x| + C$ ↓ eの肩にのっける.

$u + \sqrt{1+u^2} = \tilde{C} \cdot x$ ↓ $u = \frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \tilde{C}x$

$\therefore y + \sqrt{y^2 + x^2} = \tilde{C}x^2$

(3) $xy' - y = y^2 - x^2$

$y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x}y^2 - x$ (リッカチ)

特殊解として $y = x$ が見つかる.

$u = y - x$ $(y = x + u)$ とすると.

$\cancel{1} + u' = \cancel{1} + \frac{1}{x}u + \frac{1}{x}(x^2 + 2ux + u^2) - x$

$u' = \frac{1}{x}u + \cancel{x} + 2u + \frac{1}{x}u^2 - \cancel{x}$

$= \left(\frac{1}{x} + 2\right) \cdot u + \frac{1}{x}u^2$ ← ベルヌーイ

$z = u^{1-2} = u^{-1}$ とおくと. $\times(-u^{-2})$

$z' = -u^{-2}u'$ より

$-u^{-2}u' = -\left(\frac{1}{x} + 2\right)u^{-1} - \frac{1}{x}$

$z' = -\left(\frac{1}{x} + 2\right)z - \frac{1}{x}$ ← 1階形

→ 斉次の解は $z' = -\left(\frac{1}{x} + 2\right)z$ より

$\log|z| = -(\log|x| + 2x) + C$

$\therefore z = \pm e^{-\log|x| - 2x + C} = \tilde{C} \cdot \frac{e^{-2x}}{x}$

$\tilde{C}$を$u(x)$として. 代入すると

$u' \frac{e^{-2x}}{x} + u \cdot \left(\cancel{-\frac{1}{x^2}e^{-2x} - 2 \cdot \frac{e^{-2x}}{x}}\right) = -\cancel{\left(\frac{1}{x} + 2\right)u \cdot \frac{e^{-2x}}{x}} - \frac{1}{x}$

$u' = -e^{2x}$

$u = -\frac{1}{2}e^{2x} + \tilde{C}$

ゆえに. $z = u \cdot \frac{e^{-2x}}{x} = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + \tilde{C}\right) \cdot \frac{e^{-2x}}{x}$

$= \left(-\frac{1}{2} + \tilde{C}e^{-2x}\right)\frac{1}{x}$

$u = \frac{1}{z} = \frac{x}{-\frac{1}{2} + \tilde{C}e^{-2x}} = \frac{2x}{-1 + \tilde{C}'e^{-2x}}$

$\therefore y = x + u = x + \frac{2x}{\tilde{C}'e^{-2x} - 1}$

1階微分方程式 総まとめ【解答】 3/3

$\boxed{3}$ $y' = \sqrt{2x+y+1} + \dfrac{2}{\sqrt{2x+y+1}}$

(1) $u = \sqrt{2x+y+1}$ とすると.

$$u' = \frac{2+y'}{2\sqrt{2x+y+1}} = \frac{2+y'}{2u}$$

$\Leftrightarrow$ $y' = 2uu' - 2$ だから

$$2uu' - 2 = u + \frac{2}{u}$$

$$2uu' = 2 + u + \frac{2}{u} = \frac{u^2+2u+2}{u}$$

$$\therefore u' = \frac{u^2+2u+2}{2u^2}$$ (変数分離形)

(2) $$\int \frac{u^2}{u^2+2u+2}\,du = \int \frac{1}{2}\,dx$$

$$\int \left(1 - \frac{2u+2}{u^2+2u+2}\right) du = \frac{1}{2}x + C$$

$$u - \log|u^2+2u+2| = \frac{1}{2}x + C$$

$$\frac{e^u}{u^2+2u+2} = C \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$ より $u = \sqrt{2x+y+1}$

$$\frac{e^{\sqrt{2x+y+1}}}{2x+y+1+2+2\sqrt{2x+y+1}} = C e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\therefore \frac{e^{\sqrt{2x+y+1}}}{2x+y+3+2\sqrt{2x+y+1}} = C e^{\frac{1}{2}x}$$

$\boxed{4}$ $y' = \dfrac{y+3x-5}{y-x+3}$

($Y' = y'$, $X' = x'$ に注意!!)

(1) $Y = y - y_0$, $X = x - x_0$ とすると

$$Y' = \frac{Y+y_0+3X+3x_0-5}{Y+y_0-X-x_0+3} = \frac{Y+3X+(y_0+3x_0-5)}{Y-X+(y_0-x_0+3)}$$

$$\begin{cases} y_0+3x_0-5=0 \\ y_0-x_0+3=0 \end{cases}$$ なる x_0, y_0 を求めると.

$x_0 = 2$, $y_0 = -1$ であるから.

$a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 3$,

$x_0 = 2$, $y_0 = -1$ とすれば

$$Y' = \frac{cY+dX}{aY+bX} \quad \left(= \frac{Y+3X}{Y-X}\right)$$ となる.

(2) $$Y' = \frac{Y+3X}{Y-X} = \frac{\frac{Y}{X}+3}{\frac{Y}{X}-1}$$ (同次形)

$U = \dfrac{Y}{X}$ とおくと. ($Y = XU$)

$Y' = U + XU'$ より

$$U + XU' = \frac{U+3}{U-1}$$

$$\therefore U' = \frac{1}{X}\left(\frac{U+3}{U-1} - U\right) = -\frac{1}{X}\cdot\frac{U^2-2U-3}{U-1}$$

変数分離形 ↑

$$\int \frac{U-1}{U^2-2U-3}\,dU = -\int \frac{1}{X}\,dX$$

$$\frac{1}{2}\log|U^2-2U-3| = -\log|X| + C$$

$$U^2 - 2U - 3 = \frac{C}{X^2}$$ より $U = \dfrac{Y}{X}$

$$\frac{Y^2}{X^2} - 2\frac{Y}{X} - 3 = \frac{C}{X^2}$$ より $\times X^2$

$$Y^2 - 2XY - 3X^2 = C$$ より $Y = y+1$, $X = x-2$

$$\therefore (y+1)^2 - 2(x-2)(y+1) - 3(x-2)^2 = C$$