1. 多変数関数とは？

たくさん　　　　　　　　　　　　1つ

入力：$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longrightarrow$ 出力：z

$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

・2変数関数

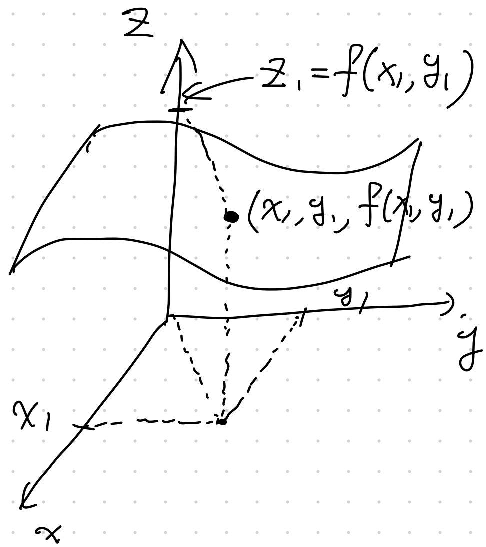
$$z = f(x, y)$$

↓

2次元 (x, y) の点に対して

z 軸の値が決まる！

⟶ 3次元にグラフがかける。

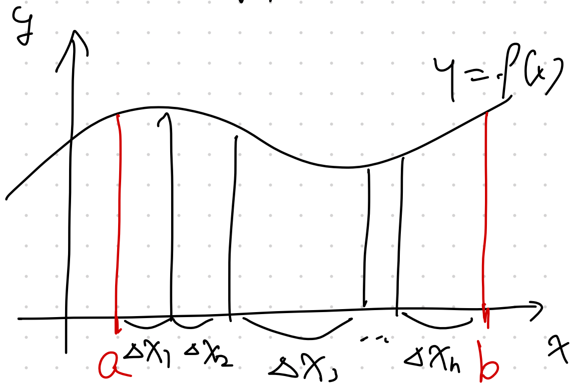


2. 2重積分とは…？

2.1 理論的な話

1変数の積分のreview

→ x軸と$f(x)$で囲まれる部分の面積（符号つき）



① 区間$[a,b]$をnコに ~~適当に~~ 分割し $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$

② その区間Δx_iから代表点ξ_iをえらぶ

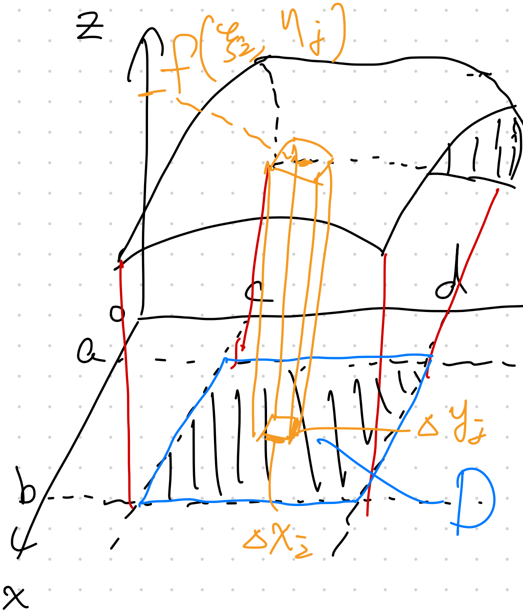
$\boxed{\text{存在するならば}}$

$$\underbrace{\lim_{\Delta \to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}_{\text{各長方形}}}_{\text{和}}}_{\text{極限}} = \underbrace{\int_a^b}_{\lim \Sigma} \underbrace{f(x)\,dx}_{f(\xi_i)\Delta x_i}$$

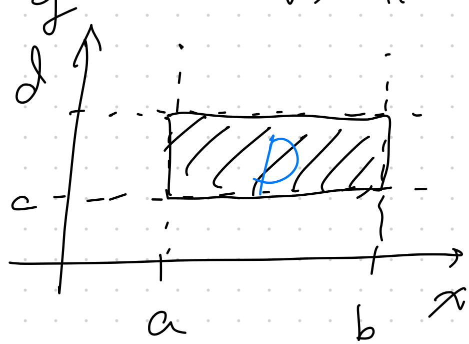
2重

2重積分

→ xy平面と $z=f(x,y)$ で囲まれる部分の体積
符号つき

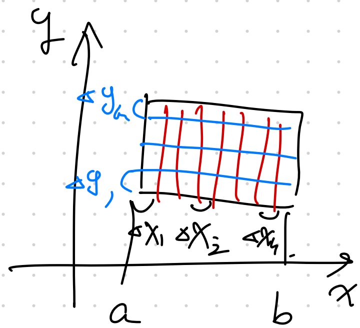


$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$
の長方形



① - A. 区間 $[a, b]$ を $\underline{n\text{コ}}$ に分割し
$\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$

- B. 区間 $[c, d]$ を $\underline{m\text{コ}}$ に分割し
$\Delta y_1, \Delta y_2, \cdots, \Delta y_m$

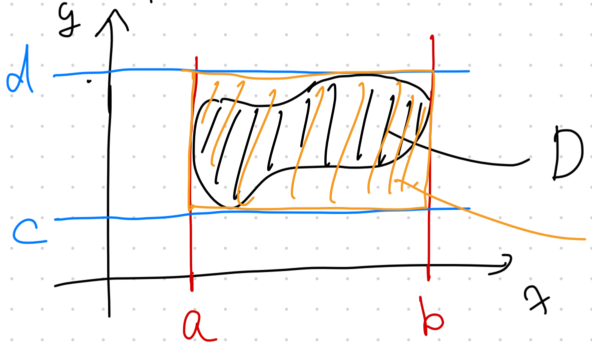


② 各 Δy_j Δx_i の長方形から. 代表点 (ξ_i, η_j) をえらぶ

$\boxed{\text{存在するならば}}$

$$\underbrace{\lim_{\Delta\to 0} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j}_{\text{直方体}}}_{\text{和}}}_{\text{極限}} = \underbrace{\iint_D}_{\lim\sum\sum} \underbrace{f(x, y)\,dx\,dy}_{f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j}$$

Q. Dが長方形じゃないときは？



このDとfで囲まれる部分の体積を知りたい！

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in D) \\ 0 & ((x,y) \notin D) \end{cases}$$

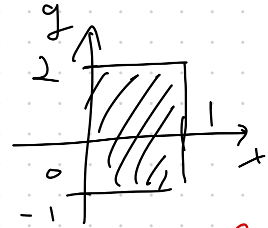
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \underbrace{\iint_{D'} \tilde{f}(x,y)\,dxdy}_{\text{さっき定義した！}}$$

2.2 実際に計算してみよう!

○その1. Dが長方形のとき.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$

$D: 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2$



※順番にやればよし!

$$= \int_{-1}^{2}\left(\int_0^1 xy\,dx\right)dy$$

$$\left(\#\ \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{-1}^{2} y\,\underbrace{\left(\int_0^1 x\,dx\right)}_{=\frac{1}{2}}dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{2} y\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[y^2\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(4-1) = \frac{3}{4} \quad //$$

$$\#\ \iint_D x\cdot y\,dxdy = \int_{-1}^{2}\int_0^1 x\cdot y\,dxdy$$

$$= \int_{-1}^{2} y\,dy \cdot \int_0^1 x\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 3\right)\times\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad //$$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+y^2)(3+x)}\,dx\,dy \quad \left(D: \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq \sqrt{3} \end{array}\right)$

(3) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy \quad \left(D: \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right)$

(2) $\dfrac{\pi}{12}\log\dfrac{5}{4}$

(3) 0

$\longrightarrow$ 順番に積分する方法

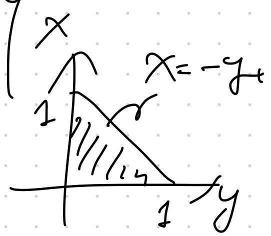
= 累次積分

○その2. Dが長方形じゃないとき

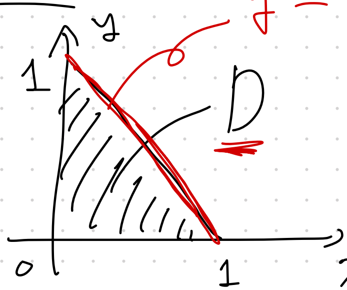
$\longrightarrow$ Dを $\left\{\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{array}\right\}$

or $\left\{\begin{array}{l} \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{array}\right\}$

と表せない？



例)

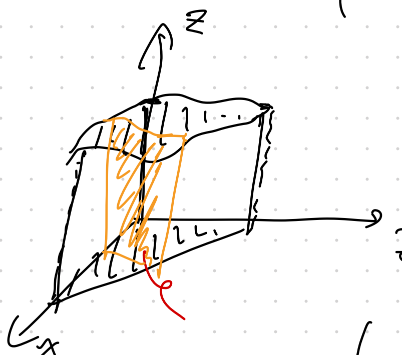


$$D : \left\{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq -x+1 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq -y+1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array}\right\}$$

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$

$$= \int_0^1 \int_0^{-x+1} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

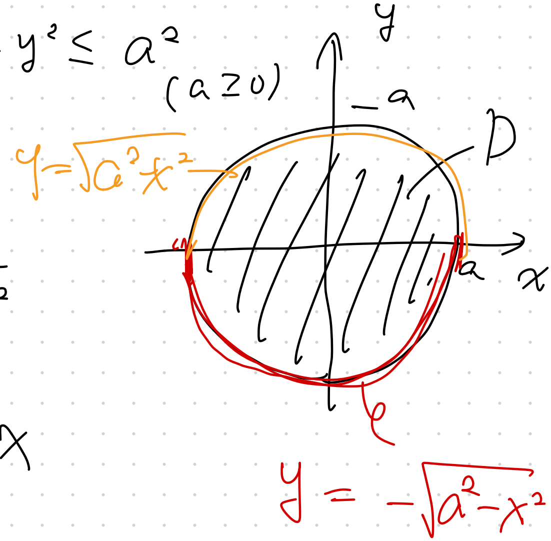


$$= \int_0^1 \left\{ x^2 [y]_0^{-x+1} + \frac{1}{3}[y^3]_0^{-x+1} \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ x^2(-x+1) + \frac{-1}{3}(x-1)^3 \right\} dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[(x-1)^4\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

(2) $\iint_D y^4 \, dx\,dy \quad D: x^2+y^2 \le a^2 \quad (a \ge 0)$



$$D: \begin{cases} -a \le x \le a \\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^4 \, dy\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} 2 \cdot \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^4 \, dy\, dx$$

$$= 2 \cdot \int_{-a}^{a} \frac{1}{5} \left[y^5 \right]_0^{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \int_{-a}^{a} (a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} dx$$

x	$0 \to a$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$x = a\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = a \cdot \cos\theta$

$$= \frac{2}{5} \cdot 2 \int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\overbrace{a^2 - a^2\sin^2\theta}^{a^2\cos^2\theta}\}^{\frac{5}{2}} a\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4}{5} a^6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} a^6 \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{16}} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8} a^6 \pi \,//$$