練習問題で in.→ out.

# 定積分と図形の直観的イメージ

$\boxed{1}$ $y=5\log x$ と 2 直線 $y=5,\ x=e^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ. $S$

$y=5\log x$ と $y=5$ の共有点の $x$ 座標は

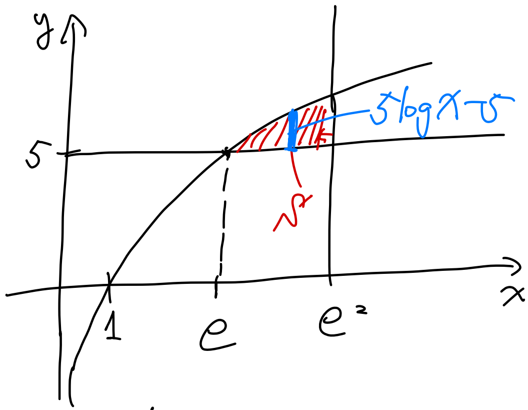
$5\log x=5 \iff x=e$

$$S=\int_e^{e^2}(5\log x-5)\,dx$$

$$=5\left(\int_e^{e^2}\log x\,dx-e^2+e\right)$$

$$=5(\cancel{e^2}-\cancel{e^2}+e)$$

$$=5e \quad //$$




$\boxed{2}$ $y^2=2x$ の頂点から、点$(2,\ 2)$までの曲線の長さを求めよ.

$x=\frac{1}{2}y^2$

$\frac{dx}{dy}=y$

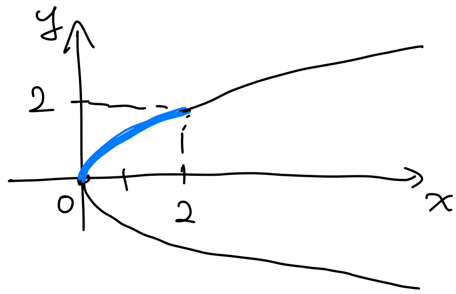
$$l=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\,dy$$

$$=\int_0^2\sqrt{y^2+1}\,dy=\int_0^2(y)'\sqrt{y^2+1}\,dy$$

$$=\left[y\sqrt{y^2+1}\right]_0^2-\int_0^2\frac{y^2+1-1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy$$

$$=2\sqrt{5}-l+\int_0^2\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy$$

$$\therefore\ l=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}) \quad //$$

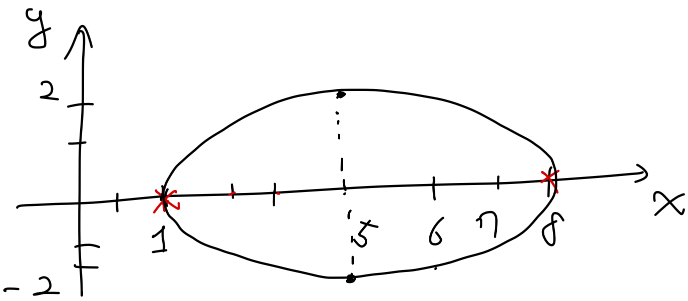



$\boxed{3}$ 楕円 $C: 4(x-5)^2+9y^2=36$ について考える.

(1) $xy$平面上に$C$の概形を書け.

$$C:\ \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\left(\#\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right)$$

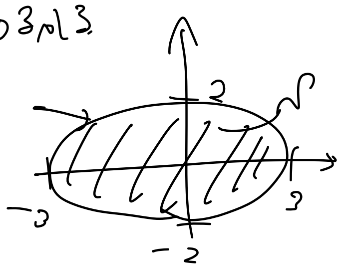



(2) $C$の内部の面積を求めよ.

$C$の内部の面積は $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ の内部の面積と同一であるから

$$S=2\int_{-3}^{3}\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{4}{3}\cdot 2\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx \quad \left(=\frac{9}{4}\pi\right)$$

$$=\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot 2\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}}\pi=6\pi \quad //$$




(3) $C$の内部を$y$軸まわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}+5\right)^2dy$$

$$-\pi\int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}+5\right)^2dy$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}3\cdot 10\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$=30\pi$$

$$=30\pi\cdot 2\pi=60\pi^2 \quad //$$