練習問題で in.→ out.

[双曲線関数連続講義 #2] テーマ：三角関数

1min.

1 次を証明せよ.

(1) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

$$(左辺)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{1}{2\cancel{4}}\{\cancel{2}\cdot e^xe^y-2\cdot e^{-x}e^{-y}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{e^{x+y}-e^{-(x+y)}\}=\sinh(x+y)=(右辺)$$

//

(2) $\sinh(x-y)=\sinh x\cosh y-\cosh x\sinh y$

$$\sinh(x-y)=\sinh(x+(-y))=\sinh x\cdot\cosh(-y)+\cosh x\sinh(-y)$$

$$=\sinh x\cosh y-\cosh x\sinh y$$

//

(3) $\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$ (複合同順)

$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$
$\cosh(x-y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

$$\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh(x\pm y)}=\frac{\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y}{\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y}\times\frac{\frac{1}{\cosh x\cosh y}}{\frac{1}{\cosh x\cosh y}}$$

$\dfrac{\sinh x\,\cancel{\cosh y}}{\cosh x\,\cancel{\cosh y}}=\tanh x$

$$=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$$

//

2 次を証明せよ.

(1) $1-\tanh^2 x=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ の両辺を $\cosh^2 x$ でわって. $1-\tanh^2 x=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ //

←半角←倍角←加法定理

(2) $\cosh\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cosh x}{2}}$

加法定理

$$\cosh x=\cosh\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\cosh\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\cosh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}+\sinh\frac{x}{2}\cdot\sinh\frac{x}{2}$$

$$=\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}=\cosh^2\frac{x}{2}+\cosh^2\frac{x}{2}-1=2\cdot\cosh^2\frac{x}{2}-1$$

$$\iff\cosh^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cosh x}{2}\xRightarrow{(\because\cosh x>0)}\cosh\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cosh x}{2}}$$

//

(3) $\cosh A+\cosh B=2\cosh\dfrac{A+B}{2}\cosh\dfrac{A-B}{2}$ ←(和→積)←(積→和)←加法定理

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\cancel{\sinh x\sinh y}$$
$$+)\ \cosh(x-y)=\cosh x\cosh y-\cancel{\sinh x\sinh y}$$
$$\cosh(x+y)+\cosh(x-y)=2\cdot\cosh x\cosh y$$

となる. ここで $x+y=A$, $x-y=B$ とおくと.

$x=\dfrac{A+B}{2}$, $y=\dfrac{A-B}{2}$ となるので.

$$\cosh A+\cosh B=2\cdot\cosh\frac{A+B}{2}\cosh\frac{A-B}{2}$$

//