

二次方程式の解と係数の関係

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題 1

次の二次方程式について、2つの解と和と積を求めよ。

(1) $2x^2 + 4x + 1 = 0$
 和: $-\frac{4}{2} = -2$
 積: $\frac{1}{2}$

(2) $3x^2 - x - 12 = 0$
 $3x^2 - x + 12 = 0$
 和: $-\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$
 積: $\frac{12}{3} = 4$

(3) $-2x^2 + 1 = 0 \leftarrow -2x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$
 和: $-\frac{0}{-2} = 0$ ← おかしいと思ふ
 積: $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ 実際は解いてみよ!

(4) $2x^2 - 6x = 0 \leftarrow 2x^2 - 6x + 0 = 0$
 和: $-\frac{-6}{2} = 3$
 積: $\frac{0}{2} = 0$

(5) $x^2 - (6 - \sqrt{2})x + 1 = 0$
 和: $-\frac{-(6 - \sqrt{2})}{1} = 6 - \sqrt{2}$ ← 無理数でもひびくぞい!
 積: $\frac{1}{1} = 1$

(6) $2x(x - 1) + 1 = 0$ 展開
 $2x^2 - 2x + 1 = 0$
 和: $-\frac{-2}{2} = 1$
 積: $\frac{1}{2}$

問題 2

$2x^2 + (m+2)x + mn = 0$ の解の和が3, 積が4であるとき、 m と n の値を定めよ

解と係数の関係より
 和: $-\frac{m+2}{2} \dots \textcircled{A}$
 積: $\frac{mn}{2} \dots \textcircled{B}$

条件より
 $\textcircled{A} = 3, \textcircled{B} = 4$ ためす。

$$\begin{cases} -\frac{m+2}{2} = 3 \dots \textcircled{1} \\ \frac{mn}{2} = 4 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

 ①を満たす
 $\textcircled{1} \times (-2)$
 $m+2 = -6$

②に移項
 $\therefore m = -8$
 ②に代入して
 $\frac{-8n}{2} = 4$
 $-8n = 8$
 $\therefore n = -1$
 $\therefore m = -8, n = -1$

問題 3

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解を α, β, γ とするとき、次の関係を証明せよ。//表の証明2がヒント!

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ で $a \neq 0$ ためす a でわって。
 $a = 0$ だと3次方程式にたがふぞい!

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \dots \textcircled{1}$$

この方程式の解は α, β, γ ためす。

この方程式は

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \dots \textcircled{2}$$

と因数分解される。

②を展開する。

$$\begin{aligned} & \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} (x - \gamma) = 0 \\ & x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x - \gamma x^2 + \gamma(\alpha + \beta)x - \alpha\beta\gamma = 0 \\ & x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

 ①と③の係数を比較すると。

$$\begin{cases} x^2: & \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ x: & \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ x^0: & \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$