

加法定理 part4 [証明(タンジェント)]

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題1

次の三角比の値を求めよ。

(1) $\tan 75^\circ$

$$= \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

加法定理

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

分母の有理化

$$= \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \times \sqrt{3}}{(1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}) \times \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

(2) $\tan \frac{1}{12}\pi = \frac{1}{12} \times 180^\circ = 15^\circ$

$$= \tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$

加法定理

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

分母の有理化

$$= \frac{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \times \sqrt{3}}{(1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}) \times \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

(3) $\tan 195^\circ$

$\tan(180^\circ + 15^\circ) = \tan 15^\circ$ (2)を使ってもOK!

$$= \tan(150^\circ + 45^\circ)$$

加法定理 分母の有理化

$$= \frac{\tan 150^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 150^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1) \times \sqrt{3}}{(1 - (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \times 1) \times \sqrt{3}} = \frac{(-1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

(4) $\tan \frac{35}{12}\pi = \frac{35}{12} \times 180^\circ = 35 \times 15^\circ = 525^\circ$

$$= \tan 525^\circ = \tan(360^\circ + 165^\circ)$$

$$= \tan 165^\circ = \tan(120^\circ + 45^\circ)$$

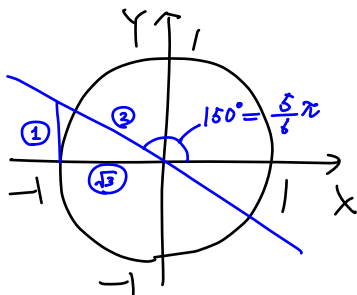
加法定理

$$= \frac{\tan 120^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 120^\circ \tan 45^\circ} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})}{1 - (\sqrt{3} \times 1)(1 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

問題2

$\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 θ の値を定め、 $\tan(\theta - \frac{\pi}{6})$ の値を求めよ。



図より、 $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ とき

$$\theta = \frac{5}{6}\pi (= 150^\circ)$$

$$\tan(\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{\tan \theta - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \theta \cdot \tan \frac{\pi}{6}}$$

加法定理

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \times 3\sqrt{3}}{\frac{2}{3} \times 3\sqrt{3}} = \frac{-2 \times 3}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\tan(\theta - \frac{\pi}{6}) = \tan(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \tan \frac{4\pi}{6} = \tan \frac{2\pi}{3}$$