

## 三角関数必須の公式：証明をマスター4！

### \* 証明しよう！

今回は、タンジェント(正接)の加法定理を証明するよ！ Part1~3 で証明したサインとコサインの加法定理をバリバリ使うので、そちらも復習しておこう！

[証明4]-----

証明1~3によって、以下のサインとコサインの加法定理が得られた。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, & \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, & \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$  を用いると、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

であり、右辺の分母分子にそれぞれ加法定理を適用し

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

また、分母分子を $\cos\alpha \cos\beta$ で割ると、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) \times \frac{1}{\cos\alpha \cos\beta}}{(\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) \times \frac{1}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}$$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$  を用いて、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

となる。

また、 $\beta$ を $-\beta$ と置き換えると、

$$\tan\{\alpha + (-\beta)\} = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha \tan(-\beta)}$$

$\tan(-\beta) = -\tan\beta$ より、

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha + (-\tan\beta)}{1 - \tan\alpha \cdot (-\tan\beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

マイナスの方の証明はプラスの方の証明を全部マイナスにして、証明しても同じ結果になるよ！

タンジェントの加法定理はサインとコサインから簡単に証明できるので、しっかりおさえておこう！

**Q** 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題 1

次の三角比の値を求めよ.

(1)  $\tan 75^\circ$

(3)  $\tan 195^\circ$

(2)  $\tan \frac{1}{12}\pi$

(4)  $\tan \frac{35}{12}\pi$

問題 2

$\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、 $\theta$  の値を定め、 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$  の値を求めよ.