

加法定理 part2 [証明 2(コサイン)]

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題 1

次の三角比の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ$
 $= \cos(45^\circ + 30^\circ)$ \rightarrow 加法定理
 $= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$ \rightarrow 通分
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(3) $\cos 195^\circ$
 $= \cos(150^\circ + 45^\circ)$ \rightarrow 加法定理
 $= \cos 150^\circ \cos 45^\circ - \sin 150^\circ \sin 45^\circ$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ \rightarrow 通分
 $= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos \frac{1}{12}\pi$
 $\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{12} \times 180^\circ = 15^\circ$ より。
 $\cos \frac{1}{12}\pi = \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$ \rightarrow 加法定理
 $= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$ \rightarrow 通分
 $= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(4) $\cos \frac{35}{12}\pi$
 $\frac{35}{12}\pi = \frac{35}{12} \times 180^\circ = 35 \times 15^\circ = 525^\circ$
 $= 165^\circ + 360^\circ$ より。
 $\cos \frac{35}{12}\pi = \cos(165^\circ + 360^\circ) = \cos 165^\circ$
 $= \cos(120^\circ + 45^\circ)$ \rightarrow 加法定理
 $= \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ$
 $= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

問題 2

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan \theta < 0$ のとき、 $\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$ の値を求めよ。

$\cos \theta > 0$, $\tan \theta < 0$ より、 $\sin \theta < 0$ である。

$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ (相互関係)
 $= -\sqrt{1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^2}$
 $= -\sqrt{1 - \frac{1}{3}}$
 $= -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

よって $\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2 \times 3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$