このプリントは【基礎数学】向けだよ！

加法定理 part2 ［証明 2(コサイン)］

三角関数必須の公式：証明をマスター2！

✻ 証明しよう！

今回は余弦(コサイン)の加法定理を別の方法で証明するよ！ PartⅠと似たようなところはあるけど、「自ら証明する力」を UP させるためにも、しっかりと理解しよう！ ☆で挟まれているところは証明 2 独自！

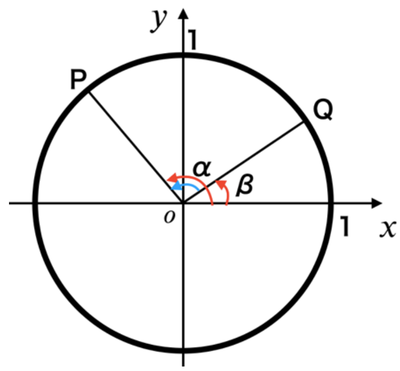
※partⅠと同じような式変形は少し簡略化しているので、詰まったら、partⅠを参照してね。

［証明 2］--

角 α, β の表す動径と単位円との交点をそれぞれ P, Q とすると、

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad Q(\cos\beta, \sin\beta)$$

と表せる(三角関数の一般角における定義)。



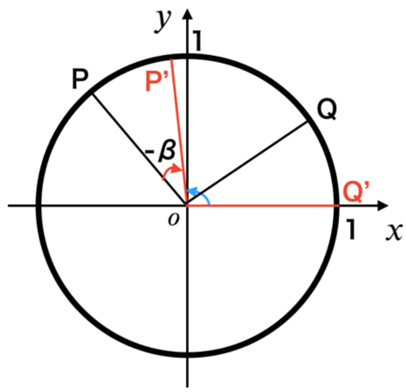
PQ の長さ(の 2 乗)を考えると、下のようになる。

$$PQ^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha$$
$$= 1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$
$$= 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \cdot\cdot\cdot ①$$

☆ ここで、三角形 OPQ を原点 O を中心として、$-\beta$だけ回転した図形 OP'Q'を考える。OQ'はx軸正の向きと重なり、P'は角$\alpha - \beta$(図の青矢印)の表す動径と単位円との交点となるため、P', Q'はそれぞれ、

$$P'(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)), \qquad Q'(1, 0)$$

と表せる。



PQ の長さ(の 2 乗)は P'Q'の長さ(の 2 乗)に等しいため、座標平面上の距離の公式を用いて、新たに PQ の長さ(の 2 乗)を求めると、

$$PQ^2 = P'Q'^2 = \{1 - \cos(\alpha - \beta)\}^2 + \{0 - \sin(\alpha - \beta)\}^2$$
$$= \{1 - \cos(\alpha - \beta)\}^2 + \sin^2(\alpha - \beta)$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)$$

三角関数の相互関係より $\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = 1$ だから、

$$PQ^2 = 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2\{1 - \cos(\alpha - \beta)\} \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。☆

①, ②を比較する。 $PQ^2 = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2\{1 - \cos(\alpha - \beta)\}$

$$1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 1 - \cos(\alpha - \beta)$$

よって、 $$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

また、βを$-\beta$と置き換えると、

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha(-\sin\beta)$$
$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Part3 では、コサインの結果を使って、サインの加法定理を証明するよ！

【練習問題で in.→out.】次のページへ

練習問題で in.→ out.

加法定理 part2 [証明2(コサイン)]

1min. out.

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題1

次の三角比の値を求めよ.

(1) $\cos 75^\circ$

(3) $\cos 195^\circ$

(2) $\cos\dfrac{1}{12}\pi$

(4) $\cos\dfrac{35}{12}\pi$

問題2

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \tan\theta < 0$ のとき、$\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ.