

加法定理 part I [証明 I (コサイン)]

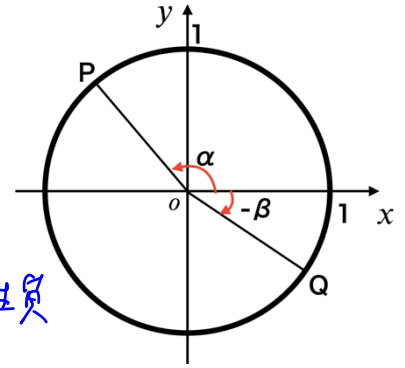
Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題

右下の図を用いて

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

を証明せよ。



(証明)

三角関数の定義より

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha), Q(\cos(-\beta), \sin(-\beta)) \quad \text{性質}$$

$$= (\cos\beta, -\sin\beta)$$

PQ^2 は、公式より。

$$PQ^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

相互関係

$$= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta + 1 - 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$= 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \quad \text{--- ①}$$

また、 $\triangle POQ$ で余弦定理を用いて。

$$PQ^2 = PO^2 + OQ^2 - 2 \times PO \times OQ \times \cos(\alpha + \beta)$$

$$PO = OQ = 1 \quad \text{(半径)}$$

$$= 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\alpha + \beta)$$

$$= 2(1 - \cos(\alpha + \beta)) \quad \text{--- ②}$$

①、②より

$$2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2(1 - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\div 2 \quad \hookrightarrow \quad 1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 1 - \cos(\alpha + \beta)$$

$$-1 \text{ ずつ } \times (-1) \quad \hookrightarrow \quad \therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

