このプリントは【基礎数学】向けだよ！

加法定理 part1［証明1(コサイン)］ 1min.

三角関数必須の公式：証明をマスター！

証明しよう！

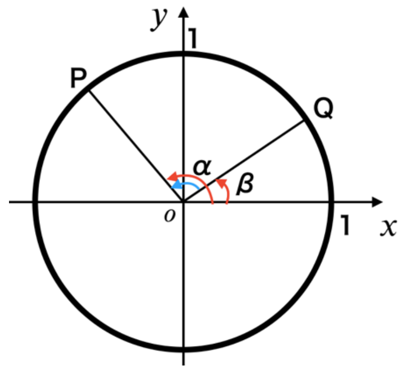
余弦(コサイン)の加法定理を証明していこう！ まずは最も有名な証明方法で。

［証明1］--

角α, βの表す動径と単位円との交点をそれぞれP, Qとすると、

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad Q(\cos\beta, \sin\beta)$$

と表せる(三角関数の一般角における定義)。ここで、PQの長さ(の２乗)を２通りの方法で表そう。



① 座標平面上での距離の公式を用いる

$PQ^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2$

$\quad = \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha$

また、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ なので、

$PQ^2 = 1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$

$\quad = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$・・・①

② 余弦定理を用いる

三角形OPQで、$\angle POQ = \alpha - \beta$(青矢印), $OP = OQ = 1$(単位円の半径)より、余弦定理を用いて

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos(\alpha - \beta)$

$\quad = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$

$\quad = 2\{1 - cos(\alpha - \beta)\}$・・・②

①, ②を比較する。

$$PQ^2 = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2\{1 - cos(\alpha - \beta)\}$$

$$1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 1 - cos(\alpha - \beta)$$

$$-\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = cos(\alpha - \beta)$$

よって、

$$\boldsymbol{cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

また、βを$-\beta$と置き換えると、

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta, \sin(-\beta) = -\sin\beta$より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha(-\sin\beta)$$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - sin\alpha\sin\beta}$$

（証明終）

というわけで、今回の証明part1はここまで！

part2はサインの証明・・・と行きたいところだが、もう１パターン、コサインの証明方法を紹介するよ！

【練習問題でin.→out.】次のページへ

練習問題で in.→ out.

加法定理 part1 ［証明1(コサイン)］

1min. out.

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題

右下の図を用いて

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ.