このプリントは【基礎数学】向けだよ！

二次関数と二次方程式

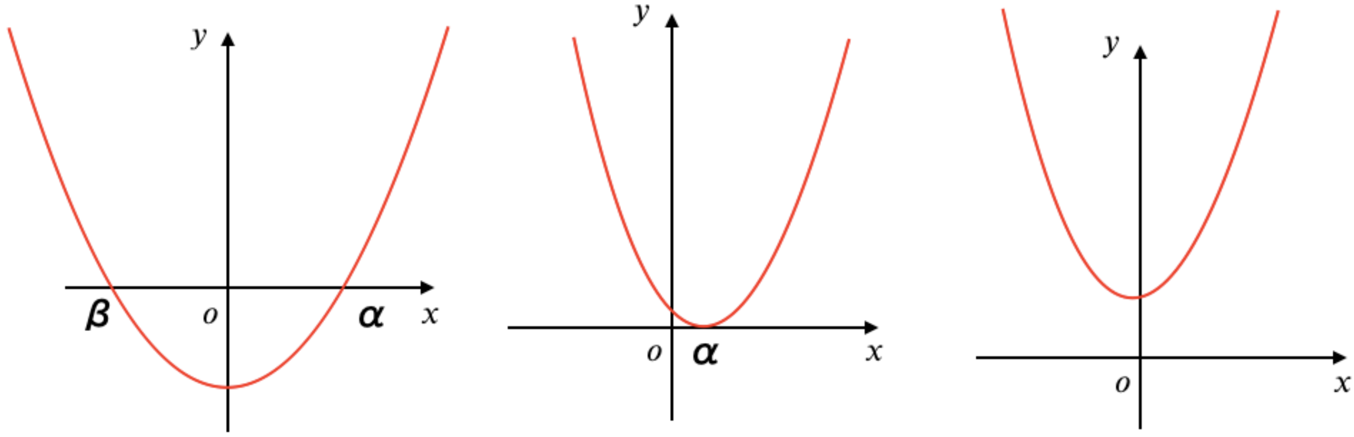
1min.

二次関数と二次方程式の関係をつかむ！

1 グラフとＸ軸との共有点・・？

　ある二次関数のグラフを書いてみる。そのグラフをＸ軸との共有点（交わっている点）との関係で分類すると、以下の３つに分けることができるのがわかる。

[1] 2点で交わる　　**[2] 1点で交わる(接する)**　　**[3] 交わらない**



　上の図はすべて、下に凸だが、上に凸の場合も、上の図をすべて反転させればいいから、どんなグラフも、上の３種類に大別できる。それぞれの状態を整理しよう。

[1] グラフとＸ軸が２つの共有点をもつ　→　α，β の２点で交わる
[2] グラフとＸ軸が１つの共有点をもつ　→　α の１点で接する
[3] グラフとＸ軸が０つの共有点をもつ　→　交わらない（共有点をもたない）

2 共有点の数と二次方程式の関係

　じゃあ、共有点（上の例の α や β）はどうやって求めたらいいだろうか。$y = ax^2 + bx + c$ の y の値が０になるときの x だから、$0 = ax^2 + bx + c$ の方程式を x について解いてやれば、α と β が求まる！（「二次方程式」を参照）　二次方程式を解くと、その解は、[1]解が２つ [2]二重解 [3]実数解なし(虚数解) の３パターンに分けられる。そして、それぞれ判別式 $D = b^2 - 4ac$ (1次の係数が偶数のとき、$D/4 = b'^2 - ac$) で判別できる。この３パターンはそれぞれ上の[1]~[3]に対応しているのがわかるだろうか。下にまとめてみよう。

二次関数と二次方程式の関係　（判別式 $D = b^2 - 4ac$ または $D/4 = b'^2 - ac$）
[1] $D > 0$ のとき、解が２つ(α, β)出てくる → $y = 0$ の x が２つ存在する → グラフはＸ軸と２点で交わる
[2] $D = 0$ のとき、解が１つ(α)出てくる → $y = 0$ の x が１つのみ存在する → グラフはＸ軸に接する
[3] $D < 0$ のとき、実数解は存在しない → $y = 0$ の x は実数の範囲に存在しない → グラフは交わらない

　つまり、判別式をとることで、グラフとＸ軸との共有点の数がわかるのだ！

【練習問題で in.→out.】次のページへ

練習問題で in.→ out.

二次関数と二次方程式

1min. out.

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題

次の二次関数のグラフとＸ軸との共有点の個数を調べよ．また、あれば、その座標を答えよ．

⑴ $y = x^2 - 2x - 3$

⑵ $y = -x^2 - 2x - 1$

⑶ $y = 2x^2 + 2x + 5$

⑷ $y = 2x^2 - 5x + 3$

⑸ $y = x^2 - x + 1$

⑹ $y = 2x^2 + 4x + 2$

Column コラム && オプション問題

二次方程式の判別式$D = b^2 - 4ac$ を二次関数$y = ax^2 + bx + c$ のグラフから考察してみよう。

$y = ax^2 + bx + c$を平方完成すると、$y = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ となり、頂点のｙ座標の分母に判別式Ｄが現れる。ここから場合分けして考える。

[1] $D = 0$のとき、頂点のｙ座標が０より、接する

[2] $a > 0$ のとき頂点のｙ座標の分母は正だから、分子の正負によって、頂点のｙ座標の正負が決まる。（分数の前の”—”に注意！）よって、

① $D > 0$ のとき、頂点のy座標は負(x軸より下にある)より、グラフはＸ軸と２点で交わる。

② $D < 0$ のとき、頂点のy座標は正(x軸より上にある)より、グラフはＸ軸と共有点をもたない。

[問題]

[3] $a < 0$ のとき、判別式と共有点の個数の関係が成り立つことを示せ。

（hint! $a < 0$ なら、グラフも[2]とは逆になることに注意）