このプリントは【基礎数学】向けだよ！

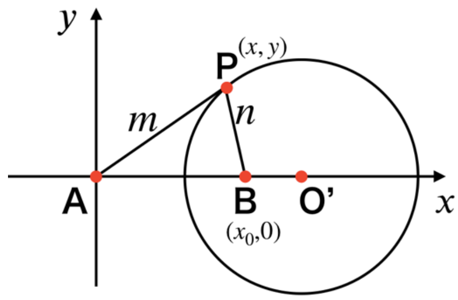
アポロニウスの円 part2

$m \neq n$ のとき、２定点 A, B からの距離の比が $m{:}n$ で一定である点の軌跡である
アポロニウスの円は、ABを $m^2{:}n^2$に外分する点 O’を中心とし、半径$\sqrt{AO' \cdot BO'}$の円である。

［証明］

Part1 では、アポロニウスの円は、A$(0,0)$, B$(x_0,0)$であるとき、次の式で与えられることを示した。

$$\left(x+\frac{m^2x_0}{n^2-m^2}\right)^2+y^2=\frac{m^2n^2}{(n^2-m^2)^2}x_0^2$$



よって、示すべきは以下の２つである。

(1) 中心の座標$\left(-\dfrac{m^2x_0}{n^2-m^2},0\right)$が、$AB$を $m^2{:}n^2$に外分する点O'の座標である。

(2) 半径$\left|\frac{mn}{n^2-m^2}x_0\right| = \sqrt{AO' \cdot BO'}$である。

<u>(1)の証明</u>

ABを $m^2{:}n^2$に外分する点O'の座標を求める。外分点の公式より、

$$O'\left(\frac{m^2x_0+(-n^2)\cdot 0}{m^2+(-n^2)},\frac{m^2\cdot 0+(-n^2)\cdot 0}{m^2+(-n^2)}\right)=\left(\frac{m^2x_0}{m^2-n^2},0\right)=\left(\frac{m^2x_0}{-(-m^2+n^2)},0\right)=\left(-\frac{m^2x_0}{n^2-m^2},0\right)$$

よって、ABを $m^2{:}n^2$に外分する点O' は中心の座標に等しく、(1)が示された。

<u>(2)の証明</u>

(1)の結果を用いて、O'のx座標をAとおくと、

$$AO'=\sqrt{(A-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{A^2}=|A|$$
$$BO'=\sqrt{(A-x_0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(A-x_0)^2}=|A-x_0|$$

となるため、$\sqrt{AO' \cdot BO'}$ を求める

$$\sqrt{AO' \cdot BO'}=\sqrt{|A|\cdot|A-x_0|}=\sqrt{|A(A-x_0)|}=$$

ここで、A を元に戻して、

$$A-x_0=-\frac{m^2x_0}{n^2-m^2}-x_0=-x_0\left(\frac{m^2}{n^2-m^2}+1\right)=-x_0\left(\frac{m^2+n^2-m^2}{n^2-m^2}\right)=-x_0\frac{n^2}{n^2-m^2}=-\frac{n^2x_0}{n^2-m^2}$$

と、なるため、

$$\sqrt{AO' \cdot BO'}=\sqrt{|A(A-x_0)|}=\sqrt{\left|\left(-\frac{m^2x_0}{n^2-m^2}\right)\left(-\frac{n^2x_0}{n^2-m^2}\right)\right|}=\sqrt{\left|\frac{m^2n^2x_0^2}{(n^2-m^2)^2}\right|}=\sqrt{\left(\frac{mn}{n^2-m^2}x_0\right)^2}$$

$$=\left|\frac{mn}{n^2-m^2}x_0\right|$$

よって、$\sqrt{AO' \cdot BO'}$は半径に等しく、(2)が示された。　（証明終）

今回も計算が少し煩雑にはなったが、とても面白い性質だ！
Part3 ではもっと面白い証明を取り上げるよ！

【練習問題で in.→out.】次のページへ