

## アポロニウスの円 part2

$m \neq n$  のとき、2 定点 A, B からの距離の比が  $m:n$  で一定である点の軌跡であるアポロニウスの円は、AB を  $m^2:n^2$  に外分する点  $O'$  を中心とし、半径  $\sqrt{AO' \cdot BO'}$  の円である。

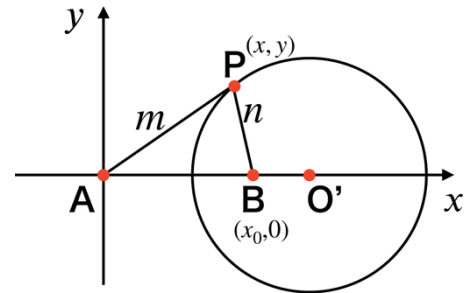
[証明]

Part1 では、アポロニウスの円は、 $A(0,0), B(x_0,0)$  であるとき、次の式で与えられることを示した。

$$\left(x + \frac{m^2 x_0}{n^2 - m^2}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2 n^2}{(n^2 - m^2)^2} x_0^2$$

よって、示すべきは以下の2つである。

(1) 中心の座標  $\left(-\frac{m^2 x_0}{n^2 - m^2}, 0\right)$  が、AB を  $m^2:n^2$  に外分する点  $O'$  の座標である。



(2) 半径  $\left|\frac{mn}{n^2 - m^2} x_0\right| = \sqrt{AO' \cdot BO'}$  である。

(1)の証明

AB を  $m^2:n^2$  に外分する点  $O'$  の座標を求める。外分点の公式より、

$$O' \left( \frac{m^2 x_0 + (-n^2) \cdot 0}{m^2 + (-n^2)}, \frac{m^2 \cdot 0 + (-n^2) \cdot 0}{m^2 + (-n^2)} \right) = \left( \frac{m^2 x_0}{m^2 - n^2}, 0 \right) = \left( \frac{m^2 x_0}{-(-m^2 + n^2)}, 0 \right) = \left( -\frac{m^2 x_0}{n^2 - m^2}, 0 \right)$$

よって、AB を  $m^2:n^2$  に外分する点  $O'$  は中心の座標に等しく、(1)が示された。

(2)の証明

(1)の結果を用いて、 $O'$  の  $x$  座標を  $A$  とおくと、

$$AO' = \sqrt{(A - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{A^2} = |A|$$

$$BO' = \sqrt{(A - x_0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(A - x_0)^2} = |A - x_0|$$

となるため、 $\sqrt{AO' \cdot BO'}$  を求める

$$\sqrt{AO' \cdot BO'} = \sqrt{|A| \cdot |A - x_0|} = \sqrt{|A(A - x_0)|} =$$

ここで、 $A$  を元に戻して、

$$A - x_0 = -\frac{m^2 x_0}{n^2 - m^2} - x_0 = -x_0 \left( \frac{m^2}{n^2 - m^2} + 1 \right) = -x_0 \left( \frac{m^2 + n^2 - m^2}{n^2 - m^2} \right) = -x_0 \frac{n^2}{n^2 - m^2} = -\frac{n^2 x_0}{n^2 - m^2}$$

と、なるため、

$$\begin{aligned} \sqrt{AO' \cdot BO'} &= \sqrt{|A(A - x_0)|} = \sqrt{\left| \left( -\frac{m^2 x_0}{n^2 - m^2} \right) \left( -\frac{n^2 x_0}{n^2 - m^2} \right) \right|} = \sqrt{\left| \frac{m^2 n^2 x_0^2}{(n^2 - m^2)^2} \right|} = \sqrt{\left( \frac{mn}{n^2 - m^2} x_0 \right)^2} \\ &= \left| \frac{mn}{n^2 - m^2} x_0 \right| \end{aligned}$$

よって、 $\sqrt{AO' \cdot BO'}$  は半径に等しく、(2)が示された。

(証明終)

今回も計算が少し煩雑にはなったが、とても面白い性質だ！

Part3 ではもっと面白い証明を取り上げるよ！

【練習問題で in.→out.】 次のページへ

## アポロニウスの円 part2

**Q** 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

### 問題

座標平面上に2点  $A(2,4), B(5,7)$  がある。  $m \neq n, m, n$  ともに正のとき、  $A, B$  からの距離の比が  $m:n$  で一定である点の軌跡は円であり、その中心  $O'$  の座標は  $(1,3)$  であった。以下の各問いに答えよ。

(1) 比  $m:n$  を求めよ。

(2) この円の面積を求めよ。ただし、円周率は  $\pi$  とする。