1min.

数学しよう week4

Last updated：2019 年 3 月 6 日

- 問題は 7 ページから構成されています。
- 全ての解答は、答えだけでなく、その解答過程も書き記してください。
- 時間は無制限です。何を参照しても構いません。
- week4 の各ページの主要なテーマを以下に示します。適宜、参照しながら進めてください。ただし、以下に示すもの以外にも、その他の数学的技能および知識が必要となる場合があります。

  page1　三角関数の相互関係 / 三角関数のグラフ

  page2　三角不等式 / 三角関数のグラフ

  page3　正弦定理 / 余弦定理

  page4　扇形 / 三角関数の相互関係 / 二次方程式 (関数)

  page5　二次方程式 (関数) / 三角関数と図形

  page6　方程式と図形 / 不等式の証明

  page7　応用問題です。スマートに解きましょう。
- 100 点満点で点数をつける場合に、各問いの横に（　　）で得点を記しています。部分点ありの 100 点満点です。参考にしてください。

1. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき、$\sin\theta$と $\cos\theta$の値を求めよ.（４点）

2. $2\sin\theta + 3\cos\theta = 2$ のとき、$\sin\theta$と $\cos\theta$の値を求めよ.（４点）

3. 次の関数のグラフを書け.（各４点）

(1) $y = \sin|x|$

(2) $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{2}$

4. 次の三角不等式を解け. ただし、$0 \leq x < 2\pi$とする.(各５点)

(1) $\begin{cases} 2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{3}(\tan^2 x - 1) \leq 2\tan x \end{cases}$

(2) $\sin x < \cos x$

(3) $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1 \geq 0$

(4) $2\sin x \geq \tan x$

5. 半径 2 の円周を $1:4:7$ に分ける点を頂点とする三角形の面積を求めよ.（４点）

6. $\triangle ABC$で、$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$ のとき、次の値を求めよ.（各４点）

(1) $\sin A:\sin B:\sin C$　　(2) $\angle A$

7. $\triangle ABC$が$\sin A\cos A=\sin B\cos B$ を満たすとき、この三角形はどんな形状か.（４点）

8. 長さ 12cm の針金で扇形を作るとき、面積を最大にする半径と中心角を求めよ. また、そのときの面積を求めよ.（４点）

9. $4x^2 - 2(1+a)x + a = 0$ の解が$\sin\theta, \cos\theta$のとき、a の値とθの値を求めよ. ただし、$0 \leq \theta < 2\pi$とする.（４点）

10. 方程式 $2\cos^2 x + \sin x - 1 + a = 0$ が解をもつように a の値の範囲を定めよ.（４点）

11. 2 次方程式 $x^2 + x\cos\theta + \sin\theta = 0,\ x^2 + x\sin\theta + \cos\theta = 0$ が少なくとも 1 つの共通実数解をもつとき、θ の値を定めよ. ただし、$0 \leq \theta < 2\pi$とする.（5 点）

12. 半径 r の円に内接する正 n 角形の周の長さを $L(n, r)$ と表す. 次の各問いに答えよ.

(1) $r = \dfrac{1}{2}$ のとき、$L(n, r)$ を n を使って表せ. また、必要なら、$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$（半角の公式）を用いてもよい.（4 点）

(2) $3.05 < \pi$ を証明せよ.（5 点）

13. 座標平面上に直線 l がある. l は、x 軸の正の向きとなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であり、点 $(2,\ 1)$ を通る. また、同じ平面上に点 P と Q を考える. 線分 PQ は l に対して $\dfrac{\pi}{2}$ の角をなし、l によって 2 等分される. 点 P が $x-2y+1=0$ 上を動くとき、点 Q はどのような図形を描くか. その方程式を求めよ.（5 点）

14. 座標平面上の点 $O(0,\ 0)$, 点 $P(h,\ s)$, 点 $Q(h,\ t)$ に対して、$\triangle OPQ$ の面積を S とする. 辺 $OP,\ OQ,\ PQ$ の長さをそれぞれ p, q, r とするとき、次の不等式を証明せよ. また、等号が成り立つ場合を調べよ. ただし、$h>0,\ t>s$ とする.（5 点）

$$p^2+q^2+r^2 \geq 4\sqrt{3}\ S \text{（Weitzenbock の不等式）}$$

15. x についての 4 次方程式 $\{x^2 - 2x \cdot \cos\theta - \cos\theta + 1\}\{x^2 + 2x \cdot \tan\theta + 3\} = 0$ は $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で、少なくとも 1 つの虚数解をもつことを示せ.(6 点)

16. 次の不等式を満たす最小の整数 n を求めよ. ただし、$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ である.(6 点)

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \times \cos\left(\frac{n}{4}\pi\right) \geq 10^{10}$$