

lmin.

数学しよう week2

Last updated : 2019 年 2 月 26 日

- 問題は 7 ページから構成されています。
- 全ての解答は、答えだけでなく、その解答過程も書き記してください。
- 時間は無制限です。何を参照しても構いません。
- week2 の各ページの主要なテーマを以下に示します。適宜、参照しながら進めてください。ただし、以下に示すもの以外にも、その他の数学的スキルおよび知識が必要となる場合があります。

page1 二次関数 / 分数関数 / 無理関数 / 絶対値

page2 二次関数の最大・最小 / 二次関数と x 軸の共有点の個数

page3 二次関数の最大・最小 / 図形

page4 二次関数 / 絶対値 / 対称移動

page5 二次関数 / 無理関数 / 絶対値 / 逆関数 / 不等式

page6 分数関数 / 逆関数

page7 応用問題です。問題文の意味をしっかりと理解してスマートに解こう！

- 100 点満点で点数をつける場合に、各問いの横に () で得点を記しています。部分点ありの 100 点満点です。参考にしてください。

1. 次の関数のグラフを書け. (各4点)

$$(1) y = |x|x - |x|$$

$$(2) y = \left| \frac{4x - 1}{2x + 1} \right|$$

$$(3) y = \frac{|x|}{x - 1}$$

$$(4) |xy| = 1$$

$$(5) |y - 1| = \sqrt{x}$$

$$(6) y = \left| 2 - \sqrt{|x| - 1} \right|$$

2. a を定数とし、関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2a$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を $m(a)$ とする. $m(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ. (4点)

3. 関数 $y = (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 3)$ ($0 \leq x \leq 3$) の値域を求めよ. (4点)

4. 関数 $f(x) = 3x^2 - 2ax + a - 1$ のグラフは範囲 $0 \leq x \leq 1$ で x 軸と共有点をもつことを示せ. (4点)

5. 半径 r の円に内接する長方形で、面積が最大であるものを求めよ。(4点)
6. 直径を AB とする円がある. この円周上の任意の点 P から端点 B におけるこの円の接線に垂線 PH を引く. $AP+PH$ が最大となる $\angle PAB$ を求めよ.(4点)
7. 周の長さ 24cm の等脚台形 $ABCD$ で、 $\angle B = \frac{\pi}{3}$ のとき、面積が最大となるものを求めよ.(各辺の長さを求めよ.) (4点)

8. $y = |x^2 - 1|$ と $y = x + a$ との共有点の個数を調べよ. (4点)

9. 点 $P(1, 2)$ を通り、 $y = x^2 + x + 1$ に接する直線の方程式を求めよ. (4点)

10. $y = x^2 + 2x - 1$ を $x = a$ に関して対称移動したグラフを求めよ. (4点)

11. 次の関数のグラフを書き、逆関数 $g(x)$ を求めよ. (各4点)

$$(1) f(x) = \begin{cases} x+1 & (x > 1) \\ -x^2 + 2x + 1 & (x \leq 1) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-2} - 2 & (x \geq 2) \\ -2x + 2 & (x < 2) \end{cases}$$

12. グラフを用いて、次の不等式を解け. (各4点)

$$(1) |x| < \sqrt{-x+3}$$

$$(2) x - 1 < \sqrt{3x+6} < x + 1$$

13. 濃度がそれぞれ 4%, 3%, 2% の食塩水 A, B, C を $1 : x : (x + 1)$ の割合で混ぜる. x を限りなく大きくしていくとき、混ぜてできる食塩水の濃度は何%に近づくか、求めよ. (4点)

14. 関数 $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ が点 $(0, 2)$ を通り、漸近線が $x = 1, y = -2$ であるとき、連比 $a : b : c : d$ を求めよ. (4点)

15. 関数 $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ が逆関数と一致するための条件を求めよ. ただし、 $ad \neq bc$ とする. (4点)

16. 以下の関係にある x, y をそれぞれ関数 $y = f(x), y = g(x)$ として定義する. このとき、以下の問いに答えよ. ただし k は定数で実数とする. (各4点)

$y = f(x) : f(1) = k - 4$ を満たし、グラフは点 $(0, -4)$ を頂点とする放物線を描く

$y = g(x) : X$ についての2次方程式 $X^2 + 2kxX + (y + 2kx - k) = 0$ の解の差が4である

- (1) $y = f(x), y = g(x)$ をそれぞれ求めよ.

- (2) 任意の x に対して、 $f(x) < g(x)$ が成り立つように k の範囲を定めよ.

- (3) 任意の x_1, x_2 に対して、 $f(x_1) \leq g(x_2)$ が成り立つように k の範囲を定めよ.