

# lmin.

## 数学しよう week1

Last update : 2019 年 2 月 26 日

- 問題は 7 ページから構成されています。
- 全ての解答は、答えだけでなく、その解答過程も書き記してください。
- 時間は無制限です。何を参照しても構いません。
- week1 の各ページの主要なテーマを以下に示します。適宜、参照しながら進めてください。ただし、以下に示すもの以外にも、その他の数学的スキルおよび知識が必要となる場合があります。

page1 複雑な整式の処理 / 因数分解

page2 複雑な整式の処理 / (繁) 分数式の計算 / 無理式の計算 (二重根号) / (共役) 複素数の計算 / 絶対値

page3 因数分解 / (連立/高次/分数/無理) 方程式と不等式 / 相反方程式

page4 整式の除法 / 証明

page5 因数分解 / 証明 / 恒等式 / 対数

page6 2 次方程式の関係 / 解と係数の関係

page7 応用問題です。頑張ってください。

- 100 点満点で点数をつける場合に、各問いの横に ( ) で得点を記しています。部分点ありの 100 点満点です。参考にしてください。

1. 次の整式を因数分解せよ. (各4点)

(1)  $2ax^2 - (3a - 2b)xy - 3by^2 - (5a - 2c)x - (5b + 3c)y - 5c$

(2)  $(a^2 - 1)(b^2 - 1) - 4ab$

(3)  $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

(4)  $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

2. 次の式を簡単にせよ. ただし、虚数単位は  $i$  とする. (各3点)

$$(1) \frac{2x-5}{x-3} - \frac{x}{x-1} - \frac{4x+5}{x+1} + \frac{3x+10}{x+3}$$

$$(2) \frac{1}{1 + \frac{x}{1 + x + \frac{2x^2}{1-x}}}$$

$$(3) \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$(4) \overline{(2+i)(1-i)} + \frac{3-i}{2+i}$$

$$(5) \left| \frac{3-i}{2+i} \right| - \left| \frac{\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}} \right|$$

3. 次の高次方程式、連立方程式、連立不等式を解け. (各4点)

$$(1) \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2 > \frac{12}{x - 3} \\ |x| + |2x + 1| \geq 2 \\ \sqrt{x - 2} + \sqrt{y + 7} = 4 \end{cases}$$

$$(3) x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$(4) \begin{cases} x^2 + xy - 8y^2 = 12 \\ x^2 - 12y^2 = 4 \end{cases}$$

4.  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ ,  $g(x) = x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 8x - 12$ ,  $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  の 3 整式の最大公約数の次数が最も高くなるように定数  $a, b$  の値を定めよ. (4 点)

5. 整式  $A, B$  の最大公約数を  $G$ , 最小公倍数を  $L$  とする.  $A, B$  を  $G$  で割った商をそれぞれ  $A', B'$  とする. このとき,  $A', B'$  は互いに素であることを証明せよ. (3 点)

6. 整式  $f(x)$  を  $ax - b (a \neq 0)$  で割ったときの商を  $q(x)$ , 余りを  $R$  とする. 整式  $xf(x)$  を  $ax - b$  で割った商と余りを求めよ. (4 点)

7.  $a : b : c = (b - c) : (c - a) : (a - b)$  のとき, 次の等式を証明せよ. (4 点)

$$(a + b)c + (b + c)a + (c + a)b = 0$$

8. 整式  $A = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 + (\sqrt[3]{c})^3 - 3\sqrt[3]{abc}$  と定める. 次の問いに答えよ. (各4点)

(1)  $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$  と改めた整式  $A' = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  を因数分解せよ.

(2)  $a, b, c$  ともに正の数るとき, 次の等式を証明せよ.

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (3 \text{ 変数の相加相乗平均})$$

9. 3次方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  の3つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき, 次の解と係数の関係を証明せよ. (4点)

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

10.  $\log_2 3$  は無理数であることを証明せよ. (4点)

11. 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  は、 $\frac{ac}{b^2} = \frac{6}{25}$  のとき、異なる2つの実数解をもつことを示せ。また、2つの解の比を求めよ。  
(4点)

12. 4次方程式  $x^4 + (a-5)x^2 + a+3 = 0$  の4つの解がすべて実数であるように  $a$  の範囲を定めよ。(4点)

13. A, B, C の3工場で同時に作業すれば何日かで終わる仕事がある。もし A 工場だけでその仕事を行えばそれより4日多くかかり、B 工場だけでは10日多くかかり、C 工場だけでは2倍かかる。A, B, C の3工場で同時に作業する場合の日数を求めよ。(4点)

14. 次の不等式を解け. (5点)

$$\frac{x}{x-1} < 1-a$$

15.  $x^2 + xy - 6y^2 - x + 7y + k$  が  $x, y$  の 1 次式 (整数係数) の積に因数分解できるように定数  $k$  の値を定めよ. またこのとき与式を因数分解せよ. (5点)