このプリントは【基礎数学】向けだよ！

二次関数と二次不等式

1min.

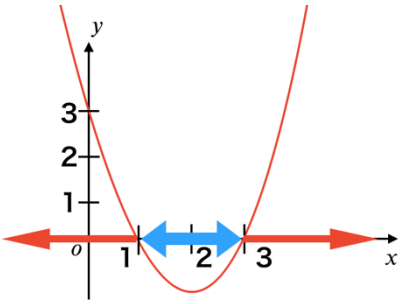
二次関数を使って二次不等式を解く！

1 グラフとＸ軸との共有点を使う！

二次不等式 $ax^2+bx+c<(>,\leqq,\geqq)0$ はグラフを利用して解くことができる。例をみて確認しよう。

例１）$x^2-4x+3<0$ を解く

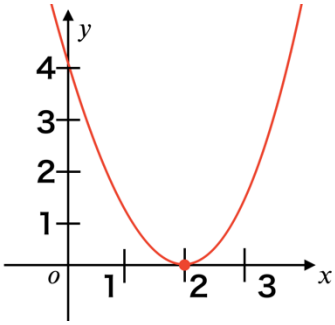
まず、$y=x^2-4x+3$ のグラフを考える。因数分解して、$y=(x-3)(x-1)$ となるので、このグラフは$x=1,3$ でＸ軸(y=0 の軸)と交わる。よって、右図より、この y の値が０より小さくなるのは青の矢印の範囲であり、答えは、$1<x<3$（$x=1,3$ を含まないことに注意！)となる。



また、$x^2-4x+3\geqq 0$という不等式なら、y の値が０以上の範囲だから、赤の矢印となり、解は、$x\leqq 1,\ 3\leqq x$（この場合、$x=1,3$ を含む)となる。

例２）$-x^2+4x-4\geqq 0$ を解く

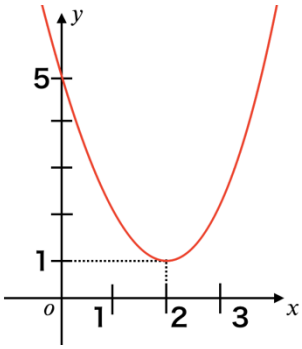
この不等式を解くのに、$y=-x^2+4x-4$ のグラフを考えてもいいが、因数分解や平方完成がしにくいので、与えられた不等式を-1 倍して、x^2の係数を正にしてから考えたほうがいい。よって、不等式は、$x^2-4x+4\leqq 0$ となり、$y=x^2-4x+4$ のグラフを考える(負の数を両辺にかけると、不等号が逆転することに注意！)。因数分解して、$y=(x-2)^2$ となるので、このグラフは $x=2$ でＸ軸と接する。このグラフの y の値が０“以下”になるのは、$x=2$（y が負になることはなく、y=0 のときのみ、この不等式を満たす)。よって、解は $x=2$である。



また、$x^2-4x+4<0$ という不等式を考えると、y の値は$x=2$の時のみ等号を満たすので、解は $x=2$ を除く実数全体$(x\neq 2)$である。

例３）$x^2-4x+5<0$ を解く

$y=x^2-4x+5$ のグラフは、$y=(x-2)^2+1$ より、右図のようになる(判別式をとって、$D/4=b'^2-ac=4-5=-1<0$ より、交わらないと考えてもいい)。このグラフの y の値が０より小さくなる x の値は、存在しない(y の値は常に正)。よって、解なし。



また、$x^2-4x+5>0$ という不等式なら、解は実数全体である。

2 解き方をまとめよう！

$ax^2+bx+c<(>,\leqq,\geqq)0$ という不等式が与えられたとき、、、

[1] a を正にする(両辺-1 倍する）→→ 不等号が逆になることを忘れない！(「不等式」参照)

[2] $y=ax^2+bx+c$ のグラフを考えて、共有点があれば、共有点をグラフ上に書く

→→ 共有点が求められなければ、$ax^2+bx+c=0$ として、解の公式を使おう！(「二次方程式」参照)

[3] グラフとＸ軸の上/下の関係から、不等式を満たす x の値を考える →→ 等号（=）に注意！

・・・で解けた！！

【練習問題で in.→out.】次のページへ

練習問題で in.→ out.

二次関数と二次不等式

1min. out.

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題

次の不等式を解け。

(1) $x^2 - x - 2 < 0$

(2) $-x^2 - 5x + 6 \geqq 0$

(3) $-x^2 + 10x - 25 > 0$

(4) $x^2 + 3x + 1 \leqq 0$

(5) $2x^2 + 24x + 72 > 0$

(6) $2x^2 - x + 1 < 0$

(7) $5x^2 + 8x - 4 \geqq 0$

(8) $x^2 + 2x + 4 > 0$

(9) $x^2 + 3 > -2x$

(10) $4 > x^2 - 3x$