このプリントは【基礎数学】向けだよ！

二次関数の最大値・最小値

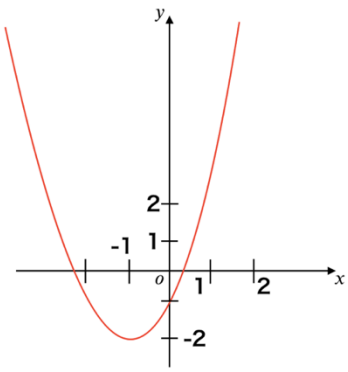
1min.

最大値・最小値を求めよう！

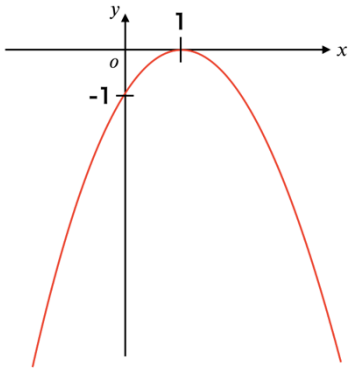
1 二次関数の最大値・最小値って？？？

二次関数に最大値・最小値はあるのだろうか？　あるとしたら、どんな値になるのだろうか？

まず、$y=x^2+2x-1$ のを考えてみよう。平方完成すると、$y=(x+1)^2-2$ となるため、グラフは下図のようになる。このグラフでは、頂点が最小値となっている。それ以外の点だと、絶対－２よりは大きくなっているからだ。最大値はない。いくら大きくしても、無限まで考えるとそれよりも大きい値が存在するからだ。よって、最小値は－２（x ＝－１のとき）で、最大値はなしとなる。



次に、$y=-x^2+2x-1$ を考える。平方完成すると、$y=-(x-1)^2$ で、グラフは右図になる。さて、このとき頂点が”最大値”になっていて、最小値はない。よって、最小値はなしで、最大値は０（x ＝１のとき）となる。



グラフの概形からもわかるように、下に凸のグラフだと、最大値なしで、最小値が頂点。逆に上に凸のグラフだと、最大値が頂点で、最小値なしとなる。下にまとめておく。

二次関数の最大・最小　（$y=ax^2+bx+c$ において）

$a>0$（正）のとき、グラフは下に凸で、最大値：なし、最小値：頂点

$a>0$（負）のとき、グラフは上に凸で、最大値：頂点、最小値：なし

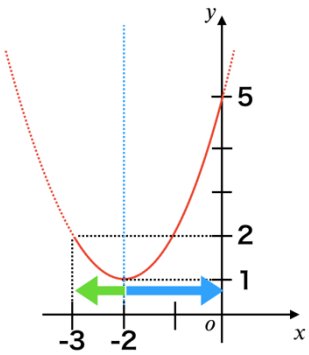
2 定義域が指定されている場合は？

では、定義域が指定されている場合の最大値・最小値はどうなるだろうか。

［1］定義域内に頂点がある場合

例１）$y=x^2+4x+5\ (-3 \leqq x \leqq 0)$ の最大値・最小値

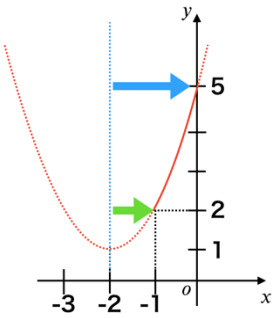
グラフは右図のようになるから、最小値は頂点で１，最大値は５（x ＝0 のとき）となる。軸からの距離が遠い方が最大値になっていることがわかる。



［2］定義域外に頂点がある場合

例２）$y=x^2+4x+5\ (-1 \leqq x \leqq 0)$ の最大値・最小値

例１と全く同じグラフだが、最大値・最小値は異なる。右図より、最小値は２（x ＝—1 のとき）で、最大値は５（x ＝0 のとき）となる。



つまり、二次関数において定義域が指定されている場合の最大値・最小値は、図を描かないと（イメージしないと）わからないが、簡単にポイントを押さえておく。

◇ 定義域内に頂点がある場合、最大値・最小値のどちらかは頂点になる。

◇ そうでない場合、軸からの距離（グラフの青の矢印）を考えると、
　グラフをイメージしやすくなる！

【練習問題で in.→out.】次のページへ

練習問題で in.→ out.

二次関数の最大値・最小値

1min. out.

Q 次の問題に答えて、知識をアウトプットしよう！！

問題１

次の二次関数の値域と、最大値と最小値を答えよう。

(1) $y=(x-1)^2+4$

(2) $y=x^2+6x+48$

(3) $y=-(x+3)^2$

(4) $y=-2x^2+4x-5$

問題２

次の定義域の二次関数の値域と、最小値・最大値を答えよう。

(1) $y=(x-2)^2+3\ (1 \leqq x \leqq 4)$

(2) $y=-x^2-2x+3\ (1 \leqq x \leqq 2)$

(3) $y=-2x^2+6x-5\ (1 \leqq x \leqq 3)$

(4) $y=x^2+8x+15(-7<x \leqq -3)$